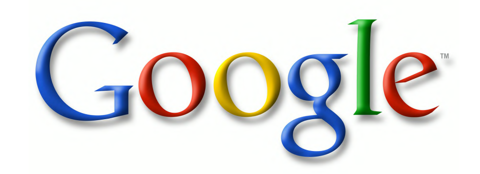
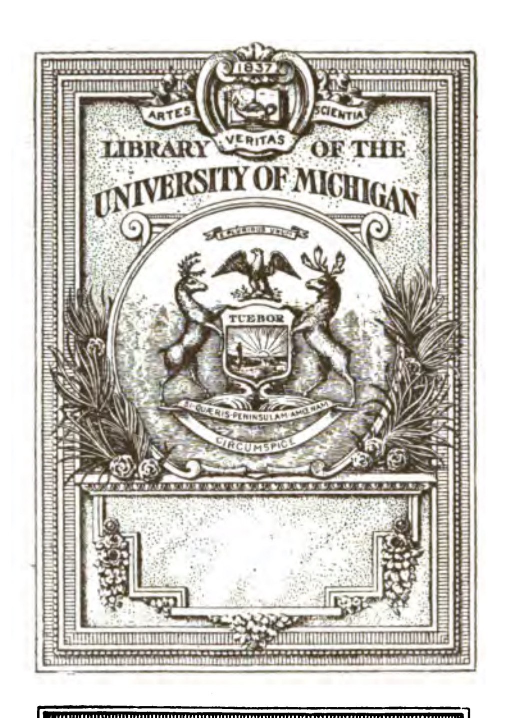



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Alexander Ziwet

Theorie des Widerstandes der Luft bei der Bewegung der Körper.

Von

Dr. J. C. Eduard Schmidt.

Mit einer Kupfertafel.

Göttingen,
bei Vandenhoeck und Ruprecht.
1831.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-31-1923

Stacks

Einleitung.

§. 1.

Es ist aus den Anfangsgründen der Dynamik bekannt, daß ein geworfener Körper, welcher sich im luftleeren Raume bewegt, und bloß von der Kraft der Schwere beschleunigt wird, die man wegen den geringen Dimensionen der durch unsere bewegenden Kräfte hervorgebrachten Bahnen, im Verhältniß zu der Länge des Halbmessers der Erde als constant und in lauter parallelen Richtungen wirkend, betrachten kann, eine Parabel beschreibt, deren Scheitel zugleich die größte Entfernung des in ihr bewegten Körpers, von der als eine horizontale Ebene anzusehende Oberfläche der Erde, angiebt, so daß daher die Axe dieser Parabel senkrecht auf der Horizontalebene steht. Ihr Parameter bestimmt sich aus der Anfangsgeschwindigkeit, dem anfänglichen Neigungswinkel der Richtung des Wurfs gegen den Horizont und der Kraft der Schwere, so daß, wenn wir durch c die Anfangsgeschwindigkeit, durch α den Neigungswinkel und durch

g die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers zu Ende der ersten Secunde bezeichnen, der Parameter der Parabel

$$p = \frac{2cc \cdot \cos\alpha^2}{g}$$

seyn wird. Nennt man die größte Höhe, die der Körper erreicht, h, und die Weite, in welcher er, vom Anfange der Bewegung aus gerechnet, die Horizontalebene wieder erreicht, b, so hat man

$$h = \frac{cc \sin\alpha^2}{2g}, \quad l = \frac{2cc \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}.$$

§. 2.

Die Berechnung der Bahnen der Bomben und Kanonenkugeln, sowohl was die Höhe betrifft, die eine mit einer bestimmten Geschwindigkeit bei einer gegebenen Elevation des Geschützes abgeschossene Kugel erreicht, als auch die Entfernung, in welcher die Kugel, von der Mündung des Geschützes an gerechnet, den Boden wieder trifft, so wie die Zeit, welche das Projectil gebraucht um seine Bahn zu durchlaufen, würde also sehr leicht und einfach seyn, wenn man wirklich sich auf die parabolische Theorie des Wurfs beschränken dürfte, und den Widerstand der Luft gegen die Kugel vernachlässigen könnte. Man hat dieses auch wirklich lange Zeit hindurch gethan, indem alle ältere Schriftsteller, welche sich mit dem Problem der Bestimmung der Bahnen von Bomben und Kanonenkugeln beschäftigten, behaupteten, daß die große Dichtigkeit der eisernen und bleiernen Kugeln, welche in der Ausübung

allein angewendet werden, verhinderte, daß die Bewegung derselben durch die geringe Dichtigkeit der Luft eine merkliche Veränderung erleiden könnte, und man sich also für die Anwendung hinlänglich genau, der aus der Bewegung im leeren Raume folgenden parabolischen Theorie des Wurfs bedienen könnte, die sich ohnehin durch ihre große Einfachheit in der Rechnung von selbst empfohl.

§. 3.

Da aber doch die Versuche, welche über die Schußweiten angestellt wurden, zu deutlich zeigten, daß, wenn man mit einer gewissen Pulverladung gleiche Kugeln unter verschiedenen Elevationen abschoß, wobei die Anfangsgeschwindigkeit dieser Kugeln für jede Elevation dieselbe blieb, die Schußweiten, welche man beobachtete, gar nicht mit denjenigen, die man aus der parabolischen Theorie abgeleitet hatte, übereinstimmen wollten, so sah man sich genöthigt, einige Aenderungen an derselben vorzunehmen, um die Rechnung in bessere Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu bringen.

Dieses that zuerst Anderson, welcher zu Ende des 17ten Jahrhunderts zwei Werke über die Bahnen der Kugeln herausgab, in denen er viele von ihm über die Schußweiten angestellte Versuche angiebt. Er konnte sich aber doch keinesweges von der beliebten parabolischen Theorie völlig trennen, und anstatt die Abweichung der Bahn von der Parabel durch den Widerstand der Luft zu verbessern, machte er die absurde Hypothese, daß die Kugel anfangs eine Zeitlang in ganz gerader

Linie fortgeht, und dann erst eine Parabel bis zu ihrem Niederfallen beschreibt. Zugleich nahm er an, die Länge dieser geraden Linie sey bei einer gegebenen Pulverladung und einer und derselben Kugel, d. h. bei einerlei Anfangsgeschwindigkeit, für jede beliebige Elevation des Geschützes dieselbe. Hierdurch erhielt er den Vortheil, daß er für zwei, unter verschiedenen Elevationen aus den Versuchen gefundenen Schußweiten, die Länge der geraden Linie, so wie auch den Parameter der Parabel so bestimmen kann, daß die berechneten Schußweiten mit den beiden beobachteten übereinstimmen, wie man aus der im folgenden Paragraph auseinandergesetzten Berechnung sehen wird.

§. 4.

Es sey (fig. 1.) AB die gerade Linie, welche die Parabel in B berührt, BF ein auf die vertikal stehende Axe CG der Parabel HBED gefälltes Perpendikel, so bestimmt die Länge der Linie BF die Lage und Größe der Parabel. Man setze AB = a, den Elevationswinkel BAD = α, BF = b, so ist im rechtwinklichten Dreyeck GBF

$$GF = BF \,.\, \mathrm{tg}\, GBF = b \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha.$$

Von B fälle man das Perpendikel BK auf die Horizontallinie AD, so ist

$$BK = AB \,.\, \sin BAK = a \,.\, \sin \alpha,$$

$$AK = AB \,.\, \cos BAK = a \,.\, \cos \alpha,$$

und da BK = FC, so wird

$$GC = FC + GF = a \,.\, \sin \alpha + b \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha,$$

$$AC = AK + KC = a \,.\, \cos \alpha + b.$$

Aus den Eigenschaften der Berührungslinie der Parabel ist bekannt, daß der Scheitel derselben, E, in der Mitte zwischen F und G liegt, so daß also

$$EG = \frac{1}{2} GF = \frac{1}{2} b \cdot tg\,\alpha,$$

und hieraus folgt

$$EC = GC - EG = a \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} b \cdot tg\,\alpha.$$

Vermöge der Eigenschaften der Parabel hat man ferner die Proportion:

$$EF : EC = FB^2 : CD^2,$$

oder, wenn man statt EF, EC, FB ihre Werthe setzt

$$\frac{1}{2} b\ tg\,\alpha : a \sin\alpha + \frac{1}{2} b\ tg\,\alpha = bb : CD^2,$$

folglich

$$CD^2 = 2b \cot\alpha\ (a \sin\alpha + \frac{1}{2} b\ tg\,\alpha)$$

$$= 2ab \cos\alpha + bb.$$

Nun bezeichne man die beobachtete Wurfweite AD durch l, so ist AD = AB + CD, folglich

$$l = a \cos\alpha + b + \sqrt{2ab \cos\alpha + bb}.$$

Setzt man die Wurzelgröße auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein, und quadrirt dann, so wird

$$ll - 2l\ (a \cos\alpha + b) + aa \cos\alpha^2 = 0.$$

Nennt man den Parameter der Parabel p, so ist

$$BF^2 = p \cdot EF,$$

oder, mit Anwendung der eingeführten Bezeichnungen

$$bb = \frac{1}{2} b p \tan\alpha,$$

und hieraus ergiebt sich $b = \frac{1}{2} p \cdot \tan\alpha$.

Setzt man diesen Werth von b in vorige Gleichung, so erhält man

$$ll - 2l\,(a \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} p \cdot tg\,\alpha) + aa \cos\alpha^2 = 0,$$

aus welcher Gleichung die Wurfweite bestimmt werden kann, wenn die Elevation und a und p bekannt sind.

§. 5.

Der Parameter p ändert sich mit der Elevation, während die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel abgeschossen wird, einerlei bleibt, a hingegen bleibt für gleiche Geschwindigkeit unter jeder Elevation nach Anderson's Hypothese constant. Nun ist §. 1. gezeigt, daß, wenn c die Geschwindigkeit bedeutet

$$p = \frac{2cc \cdot \cos\alpha^2}{g}$$

seyn muß; substituirt man daher diesen Werth statt p in die letzte Gleichung, und setzt der Kürze wegen cc = fg, so erhält man

$$ll - 2l(a \cos\alpha + f \sin\alpha \cos\alpha) + aa \cos\alpha^2 = 0.$$

Man nehme noch $l = m \cos\alpha$, so geht vorige Gleichung in diese über

$$1) \quad mm - 2m(a + f \sin\alpha) + aa = 0.$$

Diese enthält zwei unbekannte Größen, a, f, die sich aus den beobachteten Wurfweiten und Elevationen bestimmen lassen sollen. Man muß daher noch einen zweiten Versuch, der bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit der Kugel und verschiedener Elevation angestellt ist, zu Hülfe nehmen. Für diesen sey die vorher durch m bezeichnete Größe = m′, die Elevation = α′, so hat man eine zweite Gleichung

$$2) \quad m'm' - 2m'(a + f \sin\alpha') + aa = 0.$$

Multiplicirt man die erste durch $m' \sin\alpha'$, die zweite durch $m \sin\alpha$, so ergiebt sich, indem man das zweite Product vom ersten abzieht, wodurch f eliminirt wird

$$aa(m' \sin\alpha' - m \sin\alpha) + 2mm'a(\sin\alpha - \sin\alpha') + mm'(m \sin\alpha' - m' \sin\alpha) = 0,$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man

$$a(m' \sin\alpha' - m \sin\alpha) + mm'(\sin\alpha - \sin\alpha') = \pm(m - m')\sqrt{mm' \sin\alpha \sin\alpha'},$$

wo man von dem doppelten Vorzeichen des letzten Gliedes dasjenige nimmt, wodurch $a \cos\alpha$ kleiner als 1 wird.

§. 6.

Durch diese Annahme erhält man also zwei beobachtete Schußweiten mit den berechneten übereinstimmend; allein nimmt man noch einen dritten Versuch zu Hülfe, so wird diese Uebereinstimmung aufhören; auch begnügt sich Anderson immer mit zwei Versuchen, durch welche er die beiden unbekannten Größen bestimmt ohne einen dritten Versuch zu berechnen. Als Beispiel wollen wir zwei beobachtete Schußweiten, aus denjenigen, die im Jahre 1771 zu la Fere mit einem 24 Pfünder, dessen Ladung 8 ½ Pfund Pulver betrug, angestellt wurden, annehmen. Man fand

bei 10° Elevation die Wurfweite = 1234 Toisen.
" 30° " " " = 1924 " ,

folglich unsern Bezeichnungen zufolge

$$\alpha = 10^\circ, \qquad \alpha' = 30^\circ,$$
$$l = 1234, \qquad l' = 1924,$$
$$m = 1253{,}04, \qquad m' = 2221{,}64,$$

und wenn diese Werthe in die Gleichung des vorigen Paragraphs substituirt werden, so kommt

$$a \,.\, 893{,}235 - 908498{,}2 = \pm\, 476193{,}7.$$

Dies giebt für a die beiden Werthe 483,98 und 1550,2 Toisen, von denen man den ersten wählen muß, weil aus dem zweiten $a \cdot \cos \alpha = 1527$ Tois. folgt, welches größer als die Schußweite $l = 1234$ Tois. ist.

Um f zu finden schreibe man die erste Gleichung des vorigen Paragraphs auf diese Art

$$(m - a)^2 = 2 m f \sin \alpha, \text{ so wird}$$

$$f = \frac{(m - a)^2}{2 m \sin \alpha},$$

folglich in Zahlen $f = 1359$.

§. 7.

Bei der hier gewählten Anfangsgeschwindigkeit der Kugel wird also die Formel für die Schußweiten bei einer beliebigen Elevation, durch

$$mm - 2m (484 + 1359 \sin \alpha) + 234256 = 0$$

ausgedrückt. Setzt man hierin $\alpha = 43^\circ$, so wird

$$m = 2736, \quad l = 2000 \text{ Toisen.}$$

Die bei dieser Elevation zu la Fere angestellten Versuche geben aber die Wurfweite = 2183 Toisen.

§. 8.

Newton war der erste, welcher die Wirkung des Widerstandes der Luft untersuchte, und aus seinen Schlüssen fand, daß dieselbe dem Quadrat der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional seyn müßte; allein die theoretischen Untersuchungen geben den Coefficienten, mit welchem das Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt werden mußte, doppelt und auch vierfach so groß, jenachdem man unelastische oder ela-

stische Körper annahm, als derselbe aus seinen Versuchen, die er in der Paulskirche durch Hawksbee anstellen ließ, gefunden wurde. Diese Versuche werden wir im folgenden Capitel angeben.

§. 9.

Bei dieser Newtonischen Theorie des Widerstandes der Luft, ist man bis jetzt immer stehen geblieben, und alle analytischen Rechnungen, die über die wahre Gestalt der Bahnen, die von Körpern beschrieben werden, welche sich in einem widerstehenden Mittel bewegen, angestellt worden sind, gründen sich immer auf die Voraussetzung, daß die widerstehende Kraft der Luft, dem Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers proportional sey. Durch diese Annahme kam man der Wahrheit bedeutend näher, als bei der bloßen parabolischen Theorie, und es folgte hieraus, daß der Widerstand der Luft einen unglaublichen Einfluß auf die Bewegung der abgeschossenen Kugeln hatte, ganz der Meinung der älteren Artilleristen entgegen. So wird z. B. eine mit 3000 Fuß anfänglicher Geschwindigkeit abgeschossene Kugel von Eisen, die 4 Zoll 4 Linien im Durchmesser hat, bei einer Elevation von 20 Graden, unter der Annahme, daß der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sey, 13400 Fuß weit fliegen, eine Höhe von 2460 Fuß erreichen, unter einem Winkel von 56 Grad mit einer Geschwindigkeit von 340 Fuß niederfallen, und ihre Bahn in 23 ½ Secunde durchlaufen. Nach der parabolischen Theorie hingegen, in welcher es auf die Dimensionen der Kugel nicht an-

kommt, würde bei derselben Anfangsgeschwindigkeit und Elevation, die Wurfweite 185125 Fuß, die größte Höhe 16844 Fuß, und die Zeit des Flugs 66 Secunden betragen. Uebrigens würde die Kugel unter demselben Winkel und mit derselben Geschwindigkeit die Erde wieder erreichen, welche sie zu Aufang der Bewegung hatte.

§. 10.

Durch Vergleichung der Resultate in diesem Beispiel, sieht man anschaulich, welche enormen Unterschiede zwischen beiden Bahnen statt finden, obgleich die anfänglichen Bedingungen für beide dieselben sind, und wie falsch die Resultate seyn mußten, welche die ältern Artilleristen aus der parabolischen Theorie zogen. Daß diese letztere Theorie zuweilen Resultate gab, die so zu sagen im Groben mit den Beobachtungen übereinstimmten, kam allein daher, daß man den Kugeln eine weit kleinere aus der Schußweite nach der Parabel abgeleitete Anfangsgeschwindigkeit zuschrieb, als sie eigentlich durch die Kraft des Pulvers erhalten hatten, wodurch auch bei andern Elevationen der Widerstand der Luft durch die angenommene kleinere Anfangsgeschwindigkeit einigermaßen compensirt wurde. Betrachten wir z. B. die im vorigen Paragraph berechnete Schußweite von 13400 Fuß bei 20 Grad Elevation, als eine Beobachtung, so ergiebt sich hieraus vermittelst der parabolischen Theorie die Anfangsgeschwindigkeit durch die Formel

$$l = \frac{cc \,.\, \sin 2\alpha}{g},$$

wo l die Schußweite, c die Geschwindigkeit, g die Schwere = 31 ¼ Fuß, α die Elevation bedeutet

$$cc = \frac{13400}{\sin 40^\circ} \cdot 31\tfrac{1}{4},$$

also $c = 807$ Fuß, fast viermal kleiner als die wirkliche.

§. 11.

Es ist zu bemerken, daß wenn man die krumme Linie verzeichnet, welche eine Kugel bei der Annahme des Newtonschen Gesetzes des Widerstandes der Luft, beschreibt, dieselbe einer Hyperbel sehr ähnlich ist, die zwischen ihren Asymptoten construirt wird, und von denen die eine senkrecht auf der Horizontalebene steht.

§. 12.

Als man die nach der Newtonschen Theorie berechneten Widerstände genauer mit den Beobachtungen verglich, so zeigte sich, daß der wirkliche Widerstand immer größer ausfiel als ihn die Rechnung angab, vorzüglich bei so großen Geschwindigkeiten, als den Kugeln gewöhnlich mitgetheilt werden. Bei sehr kleinen Geschwindigkeiten war dieser Unterschied unmerklich, so daß bei diesen die Annahme, daß der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sey, für richtig gehalten werden konnte, allein je mehr die Geschwindigkeit des Körpers vergrößert wurde, desto mehr nahm das Verhältniß des berechneten Widerstandes zum beobachteten zu.

§. 13.

Dieser Umstand wurde zuerst von **Robins** bemerkt, welcher als Erfinder des ballistischen Pendels, um die Geschwindigkeiten der Kugeln zu messen, bekannt ist. Derselbe brach die Bahn zu den genaueren theoretischen Bestimmungen der zur Artillerie gehörigen Gegenstände in seinem im Jahre 1742 erschienenen Werke: New principles of Gunnery, und zeigte, wie man die Geschwindigkeiten der Kugeln vermöge des ballistischen Pendels direct bestimmen konnte, und aus der successiven Abnahme dieser Geschwindigkeiten fand er, daß die Annahme, der Widerstand der Luft sey dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, bei großen Geschwindigkeiten nicht zulässig sey. Er glaubte daher annehmen zu müssen, daß, sobald die Geschwindigkeit des Körpers 1300 Fuß überträfe, man den Widerstand dem Würfel der Geschwindigkeit proportional setzen müßte. Allein diese Annahme widerspricht dem in der Natur allgemein beobachteten Gesetz der Continuität, da man gar keinen Grund dazu hat, auf einmal einen solchen Sprung, vom Quadrat auf den Würfel der Geschwindigkeit anzunehmen.

§. 14.

Euler lieferte bald nach der Erscheinung des von Robins herausgegebenen Werkes im Jahre 1745 eine Uebersetzung desselben mit vielen Zusätzen versehen, in denen er die Unstatthaftigkeit der von Robins im vorigen Paragraph angegebenen Hypothese über die plötzliche Aenderung des Gesetzes des Widerstandes bemerkt.

Er suchte den Widerstand durch eine Formel darzustellen, die aus zwei Gliedern zusammengesetzt ist, von denen das erste dem Quadrat, das zweite dem Biquadrat der Geschwindigkeit proportional gesetzt wird, und deren Coefficienten er empirisch bestimmte. Man wird aber aus den folgenden Untersuchungen über den Widerstand eines elastischen Mittels sehen, daß dieser Gegenstand aus einem ganz anderen Gesichtspuncte betrachtet werden muß, als bisher geschehen ist, und der Widerstand durch eine Formel ausgedrückt wird, in welcher das Quadrat der Geschwindigkeit als Exponent vorkommt. Diese Formel reducirt sich bei sehr kleinen Geschwindigkeiten wirklich auf das Quadrat der Geschwindigkeit, allein bei Geschwindigkeiten, welche mehrere tausend Fuß betragen, sind die Glieder, welche dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional gesetzt werden, bei weitem unwirksamer als die höhern Potenzen. Auch ändert sich das Gesetz selbst nach der Gestalt der Körper.

Entwickelung der Gesetze des Widerstandes der Luft.

§. 15.

Ehe wir zu unserer eigenen Theorie des Widerstandes der Luft übergehen, wollen wir erst die Methode, nach welcher früher dieser Widerstand entwickelt wurde, darstellen. Der Grundsatz, auf welchen diese ältere Theorie gebaut ist, liegt in dem Gesetz des Stoßes der Körper, und wir müssen daher die Veränderungen der Geschwindigkeiten, welche die Körper durch ihren gegenseitigen Stoß erleiden, auseinandersetzen. Hierbei brauchen wir nur den Fall zu betrachten, in welchem die Schwerpuncte der Körper sich in gerader Linie, sowohl vor als nach dem Stoße bewegen.

§. 16.

Es sey AB die gerade Linie, auf welcher sich die Schwerpunkte zweier Körper bewegen, und zu Anfang des Stoßes mögen sich dieselben in C und D befinden. Während des Stoßes werden die Schwerpunkte beider Körper sich im Allgemeinen nähern, und nach der Zeit t, welche seit dem Anfange der Berührung verflossen ist, befinde sich C in E, D in F, so daß EF kleiner

als CD ist. Die Masse des ersten Körpers sey m, die des zweiten m', der Abstand AE = x, AF = x', wo A also der feste Punkt ist, von welchem aus während des Stoßes die Entfernungen gezählt werden. Die Körper widerstehen einander während des Stoßes mit einer gewissen Kraft, die auf jeden Fall von der beiderseitigen Entfernung ihrer Schwerpunkte abhängen muß, und da EF = AF — AE = x' — x, so werden wir diese Kraft durch $\varphi(x' - x)$ bezeichnen können, wo φ ein Functionszeichen bedeutet. Wir kennen nun zwar die Form dieser Function nicht, allein diese Kenntniß ist uns auch nicht nöthig, so lange wir uns blos auf die Modificationen der Geschwindigkeiten beschränken, welche zu Ende des Stoßes statt finden. Es tritt hierbei ein Fall ein, der dem ähnlich ist, welcher bei der Entwickelung der Gesetze der Lichtbrechung statt findet, wo wir die Form der Function, welche die Anziehung des brechenden Körpers gegen das Licht ausdrückt, zwar auch nicht kennen, aber da wir annehmen müssen, daß sie in jeder merklichen Entfernung verschwindet, so ist dies hinreichend, um die Resultate zu erhalten, welche diese Anziehung am Ende ihrer Wirkung hervorbringt.

§. 17.

Bemerkt man nun, daß der erste Körper, dessen Masse m ist, durch die Kraft $\varphi(x' - x)$ verzögert, der zweite hingegen beschleunigt wird, so hat man aus den Grundsätzen der Mechanik, zur Bestimmung ihrer Bewegung während des Stoßes, die beiden Differentialgleichungen:

$$1) \quad m \cdot \frac{ddx}{dt^2} = - \varphi(x - x),$$

$$2) \quad m' \cdot \frac{ddx'}{dt^2} = + \varphi(x' - x).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so wird

$$m \frac{ddx}{dt^2} + m' \frac{ddx'}{dt^2} = 0,$$

oder integrirt

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} = \text{Const.}$$

Nun sey allgemein die Geschwindigkeit des ersten Körpers v, die des zweiten v', so läßt sich die so eben gefundene Gleichung auch so schreiben:

$$mv + m'v' = \text{Const.}$$

Beim Anfange des Stoßes sey $v = c$, $v' = c'$, so wird ebenfalls $mc + m'c' = \text{Const.}$, folglich, wenn man die Constante aus diesen beiden Gleichungen eliminirt, so bleibt

$$mv + m'v' = mc + m'c',$$

welches die eine Gleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeiten ist.

§. 18.

Um eine zweite Gleichung zu erhalten, multiplicire man die erste Gleichung durch $2dx$, die zweite durch $2dx'$, so kommt

$$2m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{ddx}{dt} = - 2dx\, \varphi(x' - x);$$

$$2m' \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{ddx'}{dt} = + 2dx'\, \varphi(x' - x),$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt

$$m \cdot d \cdot \frac{dx^2}{dt^2} + m' \cdot d \cdot \frac{dx'^2}{dt^2} = 2(dx' - dx)\, \varphi(x' - x).$$

Da $(dx' - dx)\, \varphi(x' - x)$ ein vollkommnes Differential einer Function von $x' - x$ ist, so setze man

$$(dx' - dx)\, \varphi(x' - x) = d \cdot \psi(x' - x),$$

so erhält man, wenn man vorige Gleichung integrirt

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + m' \frac{dx'^2}{dt^2} = C + 2\psi(x' - x),$$

wo C die willkührliche hinzuzufügende Constante bedeutet. Setzt man außerdem statt $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx'}{dt'}$, ihre Werthe v und v', so ist auch

$$mvv + m'v'v' = C + 2\psi(x' - x).$$

Die durch Integration gefundene Function ψ, kann nun immer so bestimmt werden, daß sie für den Anfang des Stoßes verschwindet, und da für diesen Zeitpunkt $v = c$, $v' = c'$ ist, so wird

$$mcc + m'c'c' = C.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Constante, so ist

$$mvv + m'v'v' = mcc + m'c'c' + 2\psi(x' - x),$$

und diese Gleichung giebt die zweite Relation zwischen den Geschwindigkeiten.

§. 19.

Sind die sich stoßenden Körper vollkommen hart, so werden beide an einander hängen bleiben, und als eine einzige Masse fortgehn. Der Stoß ist also dann zu Ende, wenn beide Körper gleiche Geschwindigkeit

besitzen, so daß in diesem Fall die erste Gleichung (§. 17.)

$$mv + m'v' = mc + m'c',$$

zur Bestimmung der Geschwindigkeiten hinreichend ist. Setzt man darin $v = v'$, so ergiebt sich

$$v = v' = \frac{mc + m'c'}{m + m'},$$

$$v - c = -\frac{m'}{m + m'}(c - c').$$

Da aus der Natur der Sache folgt, daß c immer größer als c′ seyn muß, weil außerdem kein Stoß erfolgen könnte, so wird der stoßende Körper einen Verlust an Geschwindigkeit erleiden.

§. 20.

Sind beide Körper vollkommen elastisch, oder blos einer derselben, und der andere vollkommen hart, so nähern sich ihre Schwerpunkte bis auf eine gewisse Grenze, dann aber entfernen sie sich wieder von einander so lange, bis die Entfernung derselben so groß ist, als sie zu Anfang des Stoßes war. Für diesen Zeitpunkt hat $x' - x$ denselben Werth, welchen es zu Anfang des Stoßes hatte, und die Gleichung

$$mvv + m'v'v' = mcc + m'c'c' + 2\psi(x' - x)$$

giebt dann, weil $\psi(x' - x) = 0$ wird,

$$mvv + m'v'v' = mcc + m'c'c'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der frühern

$$mv + m'v' = mc + m'c',$$

so ergeben sich die Geschwindigkeiten beider Körper nach dem Stoße

$$v = c - \frac{2m'(c - c')}{m + m'}, \quad v' = c' + \frac{2m(c - c')}{m + m'},$$

also verliert der stoßende Körper doppelt so viel an Geschwindigkeit, als es bei dem Stoß harter Körper der Fall war.

§. 21.

Nimmt man die beiden Gleichungen

$$m \frac{ddx}{dt^2} = - \varphi(x' - x),$$

$$m' \frac{ddx'}{dt^2} = + \varphi(x' - x),$$

multiplicirt die erste durch m', die zweite durch m, und zieht sie dann von einander ab, so bleibt

$$mm' \frac{dd(x' - x)}{dt^2} = (m + m') \varphi(x' - x),$$

oder auch, wenn man auf beiden Seiten durch

$2 \frac{dx' - dx}{m + m'}$ multiplicirt, und dann statt $(dx' - dx)$ $\varphi(x' - x)$ seinen Werth $d . \psi(x' - x)$ setzt

$$\frac{mm'}{m + m'} . d . \frac{d(x' - x)^2}{dt^2} = 2 . d . \psi(x' - x),$$

folglich integrirt:

$$\frac{mm'}{m + m'} . \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)^2 = C + 2\psi(x' - x).$$

Die Constante soll wieder so bestimmt werden, daß für den Anfang des Stoßes $\psi(x' - x) = 0$ sey. Dann bestimmt sich die Constante durch die Gleichung

$$\frac{mm'}{m + m'} (c' - c)^2 = C,$$

und wenn man $\frac{dx'}{dt} = v'$, $\frac{dx}{dt} = v$ nimmt, so ergiebt sich

$$\frac{mm'}{m+m'}(v'-v)^2 = \frac{mm'}{m+m'}(c'-c)^2 + 2\psi(x'-x).$$

Wenn die Schwerpunkte ihre größte Nähe erreicht haben, so wird nothwendig die Geschwindigkeit beider Körper gleich geworden seyn; dann ist $v' = v$, und es bleibt für diesen Zeitpunkt

$$0 = \frac{mm'}{m+m'}(c'-c)^2 + 2\psi(x'-x),$$

folglich wird $\psi(x'-x)$ zu dieser Zeit einen negativen Werth $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{mm'}{m+m'}(c'-c)^2$, erhalten müssen.

§. 22.

Zu Anfang des Stoßes war dasselbe Integral Null, und da für seine äußerste Grenze es einen negativen Werth erhält, so folgt aus der Natur der Kraft, durch deren Integration die Größe $\psi(x'-x)$ entstanden ist, daß dieser Ausdruck während der ganzen Dauer des Stoßes negativ seyn wird. Die Gleichung

$$\frac{mm'}{m+m'}(v'-v)^2 = \frac{mm'}{m+m'}(c'-c)^2 + 2\psi(x'-x),$$

zeigt uns also, daß während der Dauer des Stoßes, die relative Geschwindigkeit $v'-v$ kleiner als die zu

Anfang und Ende des Stoßes ist. Man setze nun der Kürze wegen

$$\psi (x' - x) = - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{mm'}{m + m'} (c' - c)^2 \sin \lambda^2,$$

wo λ eine Function von $x' - x$ ist, die die Eigenschaft hat, daß für den Anfang und das Ende des Stoßes $\lambda = 0$, für die größte Nähe der Schwerpunkte hingegen $\lambda = 90^\circ$ ist.

Dann ergiebt sich

$$(v' - v)^2 = (c' - c) \cos \lambda^2,$$

oder, indem man die Quadratwurzel auszieht

$$v' - v = \pm (c' - c) \cos \lambda.$$

Man sieht leicht, daß, so lange die Schwerpunkte sich näheren, man das positive Vorzeichen, wenn sie sich hingegen von einander wieder entfernen, das negative Vorzeichen nehmen muß. Wollte man das positive Vorzeichen immer beibehalten, so müßte man den Winkel λ von 0 bis 180° wachsen lassen, wo dann beim Auseinandergehen der Schwerpunkte der Winkel λ in den zweiten Quadranten zu liegen käme, also sein Cosinus negativ werden wird. Da wir uns aber blos mit den Umständen beschäftigen, die zu Ende des Stoßes statt finden, so wird es bequemer seyn, den Winkel λ im ersten Quadranten zu lassen, und das negative Vorzeichen zu nehmen.

§. 23.

Betrachtet man nun den Stoß solcher Körper, die weder vollkommen hart noch vollkommen elastisch sind, so wie sie in der Natur wirklich überall vorkommen, so

wird zu Ende des Stoßes weder $\lambda = 90°$, wie bei vollkommen harten Körpern, noch $\lambda = 0$, wie bei vollkommnen elastischen Körpern der Fall ist, werden, sondern der Werth von λ wird zwischen 0° und 90° liegen, da das Integral, welches die Function $\varphi(x'-x)$ bestimmte, beim Auseinandergehen der Schwerpunkte nicht wieder seinen früheren Werth erreicht, sondern wegen der unvollkommneren Elasticität der Körper bei einem negativen Werthe stehen bleibt, sobald der Stoß zu Ende ist. Will man daher die allgemeinen Gesetze des Stoßes der wirklich in der Natur vorhandenen Körper haben, so muß man die beiden Gleichungen

$$v' - v = (c - c') \cos \lambda,$$
$$mv + m'v' = mc + m'c',$$

mit einander verbinden, und man erhält dann

$$v = c - \frac{m'(c - c')}{m + m'} (1 + \cos \lambda),$$
$$v' = c' + \frac{m(c - c')}{m + m'} (1 + \cos \lambda).$$

Hieraus sieht man, daß der stoßende Körper an seiner Geschwindigkeit immer weniger verliert als ein vollkommen elastischer, aber mehr als ein harter. Die Größe $\cos \lambda$ könnte man das Maaß der Elasticität nennen, welches dann für vollkommen elastische Körper der Einheit gleich wird.

§. 24.

Nachdem wir auf diese Art die Gesetze des Stoßes in ihrer Allgemeinheit, rücksichtlich der Aenderung der Geschwindigkeit auseinandergesetzt haben, wollen wir

zur Entwickelung der ältern Theorie des Widerstandes übergehen.

Es bewege sich ein senkrechter Cylinder, oder ein senkrechtes Prisma, in der Richtung seiner Axe innerhalb eines widerstehenden Mittels mit der Geschwindigkeit V fort; der Flächeninhalt seiner Basis sey aa, seine ganze Masse = m, so treibt dieser Körper in der unendlich kleinen Zeit dt, eine Masse des widerstehenden Mittels aus ihrem Platze, welche die Form eines Cylinders oder eines Prisma hat, dessen Basis der des bewegten Körpers gleich ist, und dessen Höhe durch den Weg gemessen wird, welchen der Körper in der unendlich kleinen Zeit dt zurücklegt.

Diesen Weg findet man, indem die Geschwindigkeit mit der Zeit multiplicirt wird = Vdt, also das Volumen dieser Masse = aa Vdt.

Bezeichnet man ferner die Dichtigkeit des widerstehenden Mittels durch ρ, so ist bekanntlich die Masse gleich dem Volumen multiplicirt mit der Dichtigkeit, folglich, wenn man die aus ihrem Platze vertriebene Luftmasse durch m′ andeutet, so ist

$$m' = aa\,\rho\,Vdt.$$

Betrachtet man die Masse des widerstehenden Mittels als ruhend, so wird in der Formel (§. 23.)

$$v = c - \frac{m'(c - c')}{m + m'}(1 + \cos\lambda),$$

die Geschwindigkeit $c' = 0$, und wenn man daselbst statt c, V, statt v, v + dV setzt, so kommt

$$dV = -\frac{aa\,\rho\,V^2\,dt}{m + aa\,\rho\,Vdt}(1 + \cos\lambda).$$

Dies giebt den Grundsätzen der Differentialrechnung zufolge, indem die höhern Potenzen von dt weggelassen werden

$$mdV = - aa\rho V^2 dt\ (1 + \cos\lambda).$$

Dividirt man auf beiden Seiten noch durch dt, und bemerkt, daß $\frac{mdV}{dt}$ die absolute beschleunigende Kraft bedeutet, so erhält man die verzögernde Kraft des Widerstandes der Luft gegen eine senkrecht auf der Richtung ihrer Bewegung stehende Fläche, deren Inhalt aa ist, $= aa\rho V^2\ (1 + \cos\lambda)$.

Für vollkommen harte Körper wird dieser Ausdruck, weil dann $\lambda = 90°$ ist, $= aa\rho V^2$, und für vollkommen elastische Körper, wo $\lambda = 0$ wird,

$$= 2\,aa\rho V^2.$$

Allgemein wird nach dieser Entwickelung der Gesetze des Widerstandes der Luft, dieser Widerstand größer als $aa\rho V^2$ aber kleiner als $2aa\rho V^2$ werden.

§. 23.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit, die ein von der Schwere beschleunigter Körper im Fallen zu Ende der ersten Secunde erhält, durch g, und die der Geschwindigkeit V zugehörige Fallhöhe durch s, so ist, wie man aus der Bewegung eines fallenden Körpers weiß, $V^2 = 2gs$, folglich, wenn man diesen Werth in den vorigen Ausdruck des Widerstandes

$$aa\rho V^2\ (1 + \cos\lambda)$$

substituirt, so erhält man

$$2aa\rho sg\ (1 + \cos\lambda).$$

Nun ist aber aas das Volumen einer Säule des widerstehenden Mittels, deren Grundfläche $= aa$, und deren Höhe $= s$, folglich wird $aa\rho s$ die Masse, und $aa\rho gs$ das Gewicht derselben, und wir schließen hieraus, daß „der Widerstand der Luft gegen eine senkrecht auf der Richtung ihrer Bewegung stehende Fläche durch ein Gewicht ausgedrückt wird, welches zwischen dem doppelten und vierfachen Gewichte der Luftsäule liegt, deren Grundfläche der Fläche der bewegten Ebene, und deren Höhe der, der Geschwindigkeit zugehörige Fallhöhe gleich ist, wenn die Entwickelung des Gesetzes des Widerstandes nach der Newtonschen Ansicht richtig wäre."

§. 26.

Macht die bewegte Ebene einen schiefen Winkel mit der Richtung ihrer Bewegung, so muß dieser Ausdruck noch mit dem Würfel des Sinus des Neigungswinkels multiplicirt werden. Denn es sey AB der Durchschnitt dieser Ebene, CD die Richtung der Bewegung, der Winkel BCD $= \psi$, so stößt die Ebene nur mit der Geschwindigkeit $V \sin \psi$ gegen die Luftmasse in der Richtung CE, welche die Normale auf AB ist, so daß also der Widerstand nach der Richtung CE

$$= aa\rho V^2 \sin \psi^2 (1 + \cos \lambda)$$

ist. Zerlegt man denselben nach der Richtung der Bewegung, indem man wieder mit $\sin \psi$ multiplicirt, so erhält man

$aa \rho V^2 \sin \psi^3 (1 + \cos \lambda)$, für die Kraft, welche die Bewegung verzögert.

§. 27.

Wir wollen diese Theorie auf eine Kugel anwenden, deren Mittelpunkt die Geschwindigkeit V hat. Da ein jeder noch so kleiner Theil der Oberfläche einer continuirlich gekrümmten Fläche, eine andere Lage gegen die Richtung der Bewegung hat, so muß man die Oberfläche solcher Körper in unendlich kleine Elemente zerlegen. Die Kugel ist ein durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser entstandener Körper; nehmen wir daher diesen Durchmesser verlängert als die Richtung der Bewegung an, so wird jede Zone der Kugeloberfläche, die durch die Umdrehung eines Elementes des Halbkreises entsteht, in allen ihren Punkten gleiche Winkel mit dem besagten Durchmesser machen, und man darf diese Zone als Element der Kugeloberfläche annehmen. Bezeichnet man das Element des Bogens des Halbkreises durch ds, seinen Abstand vom Durchmesser durch y, so ist der Inhalt dieser Zone

$$= 2\pi \, y \, ds,$$

also der Widerstand den diese Zone erleidet

$$= 2\pi \rho V^2 (1 + \cos \lambda) \, y \sin \psi^3 \, ds,$$

indem man in dem Ausdruck des vorigen Paragraphs $aa \rho V^2 \sin \psi^3 (1 + \cos \lambda)$ statt aa, $2\pi y \, ds$ setzt.

Nun sey (fig. 4.) ACD der Halbkreis, AD der Durchmesser, dessen Verlängerung DF die Richtung der Bewegung anzeigt, EC senkrecht auf AD, M das Element, welches durch seine Umdrehung die so eben

betrachtete Zone beschreibt, MT eine Berührungslinie, so ist MTE $= \psi =$ CEM, und wenn man den Halbmesser durch r bezeichnet, so wird das Element

$$= r d\psi = ds, \quad MP = y = r \cos\psi,$$

folglich, den Widerstand auf die unendlich schmale Kugelzone $= 2\pi\rho\, rr V^2 (1 + \cos\lambda) \sin\psi^3 \cos\psi\, d\psi$.

Will man den Widerstand auf die ganze Kugel, in sofern sie das widerstehende Mittel trifft, haben, so muß man dies Differential von $\psi = 0$ bis $\psi = 90°$ integriren, weil auf die zwischen A und C liegenden Theile der Kugeloberfläche kein Widerstand statt findet.

Man hat nun

$$\int \sin\psi^3 \cdot \cos\psi \cdot d\psi = C + \tfrac{1}{4} \sin\psi^4,$$

und dies reducirt sich für die besagten Grenzen auf $\frac{1}{4}$, folglich wird der Widerstand auf die Fläche der Kugel

$$= \tfrac{1}{2}\pi\rho\, rr V^2 (1 + \cos\lambda).$$

§. 28.

Bezeichnen wir die Masse der Kugel durch m, ihr im widerstehenden Mittel statt findendes Gewicht durch P, so hat man den Grundsätzen der Mechanik zufolge, für diese fallende Kugel die Gleichung

$$m \frac{dV}{dt} = P - \tfrac{1}{2}\pi\rho\, rr (1 + \cos\lambda) VV,$$

oder wenn man die ganze Gleichung durch die Masse m dividirt, und bemerkt, daß, wenn G die relative Schwere des Körpers in der Luft ist, $P = mG$ wird

$$\frac{dV}{dt} = G - \frac{\pi\rho\, rr}{m} \cos\tfrac{1}{2}\lambda^2 \cdot VV.$$

Hieraus erhält man leicht

$$Gdt = \frac{dV}{1 - \frac{\pi \rho rr}{mG} \cos {}^1\!/_2 \lambda^2 VV},$$

also wenn man integrirt

$$2G\alpha t = \log \frac{1 + \alpha V}{1 - \alpha V},$$

indem der Kürze wegen

$$\sqrt{\frac{\pi \rho}{mG}} \cdot r \cos {}^1\!/_2 \lambda = \alpha$$

gesetzt ist; eine Constante ist nicht nöthig, da wir den Anfang der Bewegung mit der Ruhe der Kugel als zusammenfallend annehmen.

§. 29.

Aus der obern Gleichung

$$Gdt = \frac{dV}{1 - \alpha\alpha VV},$$

ergiebt sich auch, indem wir auf beiden Seiten mit V multipliciren, und bemerken, daß statt Vdt auch ds gesetzt werden kann, wenn s den seit dem Anfange der Bewegung durchlaufenen Raum bedeutet

$$Gds = \frac{VdV}{1 - \alpha\alpha VV},$$

und wenn man diese Gleichung integrirt, so kommt

$$2\alpha\alpha Gs = \log \frac{1}{1 - \alpha\alpha VV}.$$

Die Gleichung

$$2G\alpha t = \log \frac{1 + \alpha V}{1 - \alpha V}$$

giebt ferner

$$\alpha V = \frac{e^{2G\alpha t} - 1}{e^{2G\alpha t} + 1}$$

und hieraus erhält man alsbald

$$\frac{1}{1 - \alpha\alpha VV} = \frac{1}{4} (e^{G\alpha t} + e^{-G\alpha t})^2,$$

$$\alpha\alpha Gs = \log \frac{e^{G\alpha t} + e^{-G\alpha t}}{2}.$$

§. 30.

Hawksbee ließ auf Newton's Veranlassung in der Paulskirche zu London verschiedene hohle gläserne Kugeln durch einen Raum von 220 engl. Fuß fallen, und die Zeit messen, welche dieselben gebrauchten, um diesen Raum zu durchlaufen. Eine der Kugeln hatte 5 Zoll Durchmesser, ihr Gewicht betrug 515 Gran, und die Zeit des Falles war 7″95. Nehmen wir das Gewicht eines Cubiczolles Luft nach Newton's Bestimmung = 0,29804 Gran, und die Geschwindigkeit der im leeren Raume fallenden Körper zu Ende der ersten Secunde

= 32,182 engl. Fuß,

so ergiebt sich hieraus das Gewicht der Kugel im leeren Raume = 534,5 Gran, und die relative Schwerkraft $G = 31$ engl. Fuß.

Bezeichnet man die Dichtigkeit der massiv betrachteten Kugel durch ρ', so wird

$$m = \tfrac{4}{3} \pi r^3 \rho',$$

also, wenn man diesen Werth in den Ausdruck von α substituirt:

$$\alpha = \cos \tfrac{1}{2}\lambda \sqrt{\frac{3}{4} \frac{\varrho}{\varrho'} \frac{1}{rG}},$$

oder, indem man die hier angeführten Zahlenwerthe einführt $a = \frac{\cos \frac{1}{2} \lambda}{15,078}$.

Es ist zu bemerken, daß das Reciproke von a den größten Werth der Geschwindigkeit angiebt, die die fallende Kugel annehmen kann.

Nun sollte man eigentlich nach §. 25. den Werth von $1 + \cos \lambda$ zwischen 1 und 2 annehmen, also müßte $\cos \frac{1}{2} \lambda = \sqrt{\frac{1 + \cos \lambda}{2}}$ zwischen die Werthe $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und 1 fallen. Man findet aber bald, wenn man die Data dieser Beobachtung in die Formel zwischen s und t des letzten Paragraphs substituirt, daß $\cos \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{2}$ gesetzt werden muß, wenn man dieser Gleichung Genüge leisten will, und hieraus folgt, daß man nicht, wie diese Theorie lehrt, ein Gewicht annehmen muß, das zwischen dem doppelten und vierfachen Gewicht der Luftsäule liegt (§. 25.), sondern blos ihr einfaches Gewicht, um die bei geringen Geschwindigkeiten angestellten Versuche mit der Theorie in Uebereinstimmung zu setzen. Wir werden aber sogleich sehen, daß aus unserer neuen Theorie das mit den Beobachtungen übereinstimmende Gesetz für kleine Geschwindigkeiten von selbst folgt, indem die vor dem Körper statt findende Verdichtung der Luft alles allein richtig erklärt.

§. 31.

Wir nehmen eine unendlich kleine Ebene von beliebiger Begrenzung an, die mit der Richtung ihrer Bewegung einen bestimmten Winkel, ψ, bildet. Die

Größe der Fläche selbst bezeichnen wir durch dS, und ihre Geschwindigkeit durch v. Es sey (fig. 3.) AB der Durchschnitt dieser unendlich kleinen Ebene, CD die Richtung ihrer Bewegung, und CE eine auf der Ebene errichtete Normale, so daß der Winkel ECD = 90° — ψ wird. Der Druck, den die vor AB befindliche Luft auf die als Einheit des Maaßes angenommene Fläche ausübt, sey = Π, so ist nach dem bekannten Satze, daß der Druck der Luft der Größe der Fläche proportional, die Pressung auf die angenommene unendlich kleine Ebene = Π . dS und dieser Druck wirkt senkrecht auf die Fläche AB nach der Richtung EC.

§. 32.

Es ist ferner bekannt, daß die Wirkungen des Stoßes und einer continuirlichen Kraft, in sofern von einander verschieden sind, als der Stoß augenblicklich eine endliche Geschwindigkeit, die Kraft aber erst nach einer endlichen Zeit eine endliche Geschwindigkeit hervorbringt. Da es nun aber wohl immer unentschieden bleiben wird, ob bei der Mittheilung des Stoßes keine Zeit angehe, oder ob wirklich für die vollständige Mittheilung der Geschwindigkeit einige, für unsere Sinne freilich im Allgemeinen unmerkliche, Zeit erfordert werde, so kann man jede Geschwindigkeit durch eine Kraft ersetzen, die von der Beschaffenheit ist, daß ihre Wirkung in merklichen Entfernungen verschwindet, nach welcher Erklärung diese Kraft zu den sogenannten Molecularkräften gehört. Daß bei allen in der Natur vorkommenden Körpern, denen eine gewisse Geschwindigkeit

mitgetheilt wird, während der vollständigen Mittheilung eine gewisse Zeit vergehe, ist um so mehr wahrscheinlicher, da sich bei ihnen immer eine gewisse Elasticität in größerem oder geringerem Maaße zeigt, und bei vollkommen elastischen Körpern ganz unbezweifelt einige Zeit für die Mittheilung der Bewegung zugegeben werden muß.

§. 33.

Man nehme an, ein Körper bewege sich von A nach C fort (fig. 4.), und im Anfangspunkte A seiner Bewegung befindet sich eine abstoßende Kraft, die als eine Function der Entfernung angenommen wird, aber in einer merklichen Entfernung von A eine ganz unbemerkbare Wirkung äußert. Diese Kraft sey $= Q$, AB $= x$, so hat man bekanntlich, wenn durch dt das Element der Zeit bezeichnet wird

$$\frac{ddx}{dt^2} = Q,$$

indem man t als die gleichförmig wachsende Veränderliche betrachtet. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dx, so hat man

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{ddx}{dt} = Q\,dx, \quad \text{oder}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot d \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = Q\,dx.$$

Integrirt man diese Gleichung, so wird

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = \int Q\,dx.$$

Die zum Integral hinzuzufügende Constante wird Null, da für den Anfang der Bewegung das Integral $\int Q\,dx$ anfängt, und die Geschwindigkeit auch von Null anfängt. Ist nun die Kraft Q von der vorhin beschriebenen Art, so muß das Integral $\int Q\,dx$ von $x = 0$ bis zu jedem beliebigen merklichen Werth von x immer einerlei Werth behalten. Folglich wird die Größe

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dx^2}{dt^2}$$

immer einerlei Werth behalten, sobald sich nur der Körper merklich vom Anfangspunkte der Bewegung entfernt hat, d. h. er geht mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort, indem das Differentialverhältniß $\frac{dx}{dt}$ nichts anders ist als die Geschwindigkeit, die er in jedem Punkte der Linie AC besitzt. Man kann daher die gleichförmige Bewegung, mit der ein Körper, auf welchen keine weiteren Kräfte wirken, vermittelst eines erhaltenen Stoßes fortgeht, auch dadurch vorstellen, daß man im Anfangspunkte seiner Bewegung eine abstoßende Kraft annimmt, deren Wirkung sich blos auf unmerkliche Entfernungen erstreckt.

§. 34.

Man kann die im vorigen Paragraph gefundene Gleichung

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dx^2}{dt^2} = \int Q\,dx$$

auch folgendermaßen in Worten ausdrücken:

Multiplicirt man eine Molecularkraft in das Element oder Richtung nach welcher sie wirkt, und nimmt

das Integral dieses Products von $x = 0$ bis $x = \infty$, so erhält man eine constante Größe, die dem halben Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers gleich ist, welche durch die Wirkung dieser Molecularkraft hervorgebracht wird.

§. 35.

Damit man sich von einer solchen Kraft, wie unter der Bezeichnung Q verstanden wird, einen deutlichen Begriff machen könne, wollen wir eine besondere Function von x wählen, die die angegebenen Bedingungen besitzt. Es sey z. B.

$$Q = \frac{a}{n} \cdot e^{-\frac{x}{n}},$$

wo n eine sehr kleine Entfernung, etwa ein billiontheil Zoll bedeutet; a ist ein constanter Coefficient und e die Basis der natürlichen Logarithmen $= 2{,}71828 \ldots$

Man hat dann

$$Q\,dx = \frac{a}{n} \cdot e^{-\frac{x}{n}} dx = -a \cdot d \cdot e^{-\frac{x}{n}},$$

folglich integrirt

$$\int Q\,dx = \text{Const.} - a \cdot e^{-\frac{x}{n}}.$$

Für $x = 0$ soll das Integral anfangen, man hat daher zur Bestimmung der Constante die Gleichung:

$$0 = \text{Const.} - a.$$

Hieraus findet sich

$$\int Q\,dx = a\,(1 - e^{-\frac{x}{n}}).$$

Setzt man hierin $x = \infty$, so wird

$$e^{-\frac{x}{n}} = 0, \text{ also auch}$$
$$\int Q\,dx = a.$$

Es erhält also streng genommen erst dann, wenn das Integral von $x = 0$ bis ins Unendliche ausgedehnt wird, dasselbe einen beständigen Werth, und man sieht, daß bei der angenommenen Form der Function von x für die Molecularkraft der constante Coefficient a dem halben Quadrat der Geschwindigkeit, die der Körper durch einen Stoß erhalten hatte, gleich gesetzt werden muß. Allein zugleich ist auch einleuchtend, daß wenn man n klein genug annimmt, schon bei sehr geringen Werthen von x die Exponentialgröße $e^{-\frac{x}{n}}$, so über alle Grenzen abnimmt, daß der Unterschied zwischen $1 - e^{-\frac{x}{n}}$ und der Einheit als Nichts angesehen werden kann. Setzt man z. B. n = ein billionentheil Zoll, und x = ein tausendmilliontheil Zoll, so giebt $e^{-\frac{x}{n}}$ einen Decimalbruch, der erst in der 433sten Stelle einen Werth hat.

§. 36.

Man stelle sich einen unbestimmt langen Cylinder vor, der mit atmosphärischer Luft angefüllt ist, welche diejenige Dichtigkeit und Elasticität hat, als gewöhnlich die an der Oberfläche der Erde befindliche atmosphärische Luft besitzt. Ist dieser Cylinder an beiden Enden verschlossen, so wird die Luft in selbigem von überall

gleicher Dichtigkeit seyn. Denkt man sich ferner über dem untern Deckel, welcher die Oeffnung des Cylinders verschließt, eine Kraft verbreitet, die auf die Luft anziehend wirkt, so wird die Luft nach diesem Deckel zu eine größere Dichtigkeit besitzen, allein in jedem Queerschnitt des Cylinders, parallel mit seiner den Deckel bildenden Basis, wird die Dichtigkeit der Luft einerlei Werth haben, sobald man nur eine gleichförmige Vertheilung der anziehenden Kraft voraussetzt; und da außerdem dem Mariotteschen Gesetz zufolge, die Dichtigkeit immer dem Druck proportional ist, so wird auch der Druck in jedem der erwähnten Queerschnitte derselbe seyn. Man bezeichne den Druck der in einem gewissen Queerschnitt statt findet, dessen Entfernung von der anziehenden Basis $= x$ ist, durch π, die Dichtigkeit der Luft durch ρ, die anziehende Kraft durch Q, welche wir als Function von x betrachten, so hat man aus den Gesetzen des Gleichgewichts flüssig-elastischer Materien die Gleichung

$$d\pi + \rho Q \, dx = 0,$$

und da die bei allen flüssig-elastischen Materien statt findende Bedingung, daß die Dichtigkeit dem Druck proportional sey, die Gleichung $\pi = k\rho$ giebt, wo k eine von der Elasticität der Luftart abhängende Constante ist, so kann man aus diesen beiden Gleichungen die Dichtigkeit ρ eliminiren, und es kommt

$$k \, d\pi + \pi Q \, dx = 0,$$

oder, wenn man die ganze Gleichung durch π dividirt

$$k \frac{d\pi}{\pi} + Q \, dx = 0.$$

Hiervon ist das Integral

$$k \log \pi + \int Q\, dx = Const.$$

Für $x = 0$, bei welchem Werthe das Integral $\int Q\, dx$ anfängt, sey $\pi = \Pi$, so hat man

$$k \log \Pi = Const.,$$

also, wenn dieser Werth der Constante in die vorige Gleichung gesetzt wird

$$k \log \pi + \int Q\, dx = k \log \Pi, \text{ oder}$$

$$k \, . \log \frac{\Pi}{\pi} = \int Q\, dx.$$

Geht man von den Logarithmen, welche zu den natürlichen gehören, auf die Zahlen selbst zurück, und bezeichnet durch e die Basis dieser Logarithmen, so hat man bekanntlich

$$\Pi \, . \, e^{-\frac{1}{k}\int Q\, dx} = \pi.$$

Bezeichnet man durch ρ' die Dichtigkeit die dem Druck Π, welcher unserer Annahme gemäß, den an der anziehenden Basis statt findenden Druck angeben muß, entspricht, so hat man

$$\Pi = k\rho', \text{ also auch}$$

$$\rho' \, . \, e^{-\frac{1}{k}\int Q\, dx} = \rho',$$

indem man nämlich vorige Gleichung zwischen Π und π durch k dividirt und statt $\frac{\pi}{k}$, ρ setzt.

§. 37.

Wir nehmen ferner an, die Kraft Q sey im Stande, durch ihre, sich blos auf unmerkliche Entfernungen

erstreckende, Wirkung eine Geschwindigkeit c hervorzubringen, so ist nach §. 11. für jeden merklichen Werth von x, das Integral $\int Q\,dx = \frac{1}{2}cc$, und es ist also blos noch nöthig um Π oder ρ' zu bestimmen, daß wir den Werth von π oder ρ für jeden merklichen Werth von x kennen.

Bezeichnet man die Länge des in den vorigen Paragraphen angenommenen Cylinders durch a, den Flächeninhalt seines Queerschnitts durch f, die gleichförmige Dichtigkeit der anfangs in ihm eingeschlossenen atmosphärischen Luft durch ρ°, so ist die ganze in ihm enthaltene Luftmasse $= a\,f\,\rho^{\circ}$.

Nachdem die Kraft an seiner Basis angebracht worden war, änderte sich die Dichtigkeit der Luft, nach einem Gesetz, welches durch die im vorigen Paragraph angegebene Gleichung

$$\rho' \cdot e^{-\frac{1}{k}\int Q\,dx} = \rho$$

ausgedrückt wird, so daß man in diesem neuen Zustande die in dem Cylinder befindliche Masse der Luft, blos durch Integration gefunden werden kann.

Man denke sich daher den ganzen Cylinder in unendlich dünne Scheiben zerlegt, vermittelst des Durchschnitts von Ebenen, die der Basis parallel gehen, so wird in jeder dieser Scheiben, deren Dicke $= dx$ ist, eine gleiche Dichtigkeit statt finden. Ihr Volumen ist $f dx$, und ihre Masse ist $f\rho\,dx = dm$. Nimmt man nun das Integral des Ausdruckes $m = \int f\rho\,dx$ von $x = 0$ bis zu $x = a$, so erhält man ebenfalls die ganze im Cylinder enthaltene Luftmasse. Setzt man

hierin statt ρ seinen Werth aus obiger Gleichung, so wird

$$m = f\rho' \int e^{-\frac{1}{k}\int Q\,dx} . dx.$$

Die beiden Factoren f und ρ' darf man vor das Integralzeichen setzen, weil ihre Werthe für alle Werthe von x constant sind.

Um nun das Integral

$$\int e^{-\frac{1}{k}\int Q\,dx} dx,$$

welches zwischen den angegebenen Grenzen $x = 0$ bis $x = a$ genommen werden muß, wirklich zu finden, entwickle man die in ihm enthaltene Exponentialgröße in eine Reihe, so kommt, indem der Kürze wegen

$$\frac{1}{k} \int Q\,dx = V,$$

gesetzt wird,

$$\int dx \left[1 - V + \frac{V^2}{1.2} - \frac{V^3}{1.2.3} + \ldots\right],$$

oder, wenn man jeden Theil einzeln integrirt,

$$x - xV + x\frac{V^2}{1.2} - x\frac{V^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \int x dV - \int x V dV$$
$$+ \frac{1}{1.2} \int x V^2 dV - \ldots$$

Für $x = 0$ verschwindet derjenige Theil dieses Ausdrucks, welcher kein Integralzeichen vor sich hat, und für $x = a$ wird derselbe

$$= a - aA + a\frac{A^2}{1.2} - a.\frac{A^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo A den constanten Werth des Integrals $\frac{1}{k} \int Q\,dx$

ausdrückt, welchen dasselbe erhält sobald x eine merkliche Länge erlangt hat. Diese Reihe ist aber auch

$$= a \cdot e^{-A},$$

folglich erhält das ganze Integral die Form

$$a\, e^{-A} + \int x dV - \int x V dV + \frac{1}{1.2} \int x V^2 dV - \ldots.$$

Es bleibt also noch übrig, die angehängten Integrale auszudrücken, die sich aber alle, wie wir im folgenden Paragraph zeigen werden, auf Null reduciren.

§. 38.

Die Größe V ist im Allgemeinen eine Function des Abstandes x eines Punktes von der anziehenden Basis. Nun sey x′ ein besonderer Werth von x, für welchen $V = V_{\iota}$ wird, und für $x = x' + h$ sey $V = V_{\shortparallel}$. Man setze der Kürze wegen

$$dV = V' dx,$$
$$dV' = V'' dx,$$
$$dV'' = V''' dx \text{ u. s. w.}$$

so wird vermöge des Taylorschen Lehrsatzes

$$V_{\shortparallel} = V_{\iota} + V'h + V''.\frac{hh}{1.2} + V'''\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

wo V′, V″ . . . Functionen von x sind, die durch die Differentiation aus V abgeleitet sind, und in denen statt x, x′ gesetzt werden muß.

Sobald nun x′ eine merkliche Länge erreicht hat, wird das Integral V_{ι} einen constanten Werth A erhalten, und $V_{\shortparallel}$ hat denselben Werth, der, obgleich $V_{\shortparallel}$

eine Function von $x' + h$ ist, die Function V nicht mehr durch ein Increment von x' wachsen kann. Man hat daher

$$0 = V'h + V'' \frac{hh}{1.2} + V''' \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und da diese Gleichung für jeden Werth von h richtig seyn soll, so muß jeder der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von h unabhängig von dem Werthe, den man der Größe h giebt, gleich Null werden, d. h. man hat $V' = 0$, $V'' = 0$, $V''' = 0$ u. s. w. sobald x eine merkliche Größe erreicht hat.

Alle Integrale, die wir noch zu nehmen haben, sind von der Form

$$\int x V^n dV,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet. Dies kann man auch so schreiben:

$$\int V^n V' . xdx$$
$$= \tfrac{1}{2} xx V^n V' - \tfrac{1}{2} \int xx \; d(V^n . V').$$

Das außerhalb des Integralzeichens stehende Glied verschwindet für $x = 0$; allein es verschwindet auch für $x = a$, weil dann $V' = 0$ ist. Es bleibt also blos

$$- \tfrac{1}{2} \int xx . d(V^n . V').$$

Differentiirt man wirklich und integrirt dann nach x, so findet man wiederum, daß die vor dem Integralzeichen stehenden Glieder verschwinden, und da man diese Operation sich ins Unendliche fortgesetzt denken kann, wobei alle wirklich integrirten Theile verschwinden, so folgt, daß allgemein

$\int x V^n dV = 0$ seyn muß.

§. 39.

Man hat daher

$$\int e^{-\frac{1}{k}\int Q\,dx}\,dx = a \,.\, e^{-A},$$

folglich die Luftmasse

$$m = f\varrho' \,.\, a \,.\, e^{-A}.$$

Da sich die Luftmasse selbst nicht geändert haben kann, so muß dieser Ausdruck dem frühern, als die Kraft Q noch nicht als wirkend betrachtet wurde, gleich seyn, und es wird

$$f\rho' a \,.\, e^{-A} = a f \varrho^{\circ}, \text{ oder}$$

$$\rho' \,.\, e^{-A} = \rho^{\circ}.$$

Vergleicht man dieselbe mit dem allgemeinen Ausdruck (§. 14.)

$$\rho' \,.\, e^{-\frac{1}{k}\int Q\,dx} = \rho,$$

so sieht man, daß in einer merklichen Entfernung von der Basis die Dichtigkeit der Luft, die der atmosphärischen gleich wird, also, da für dieselbe Entfernung

$\int Q\,dx = \frac{1}{2}cc$ und $A = \frac{cc}{2k}$, so hat man

$$\rho' \,.\, e^{-\frac{cc}{2k}} = \rho^{\circ}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit k und setzt den atmosphärischen Druck, der der Dichtigkeit ρ° entspricht, = p, so kommt

$$\Pi = p \,.\, e^{\frac{cc}{2k}}.$$

Dieser Ausdruck von Π würde also den Druck angeben, welche die Luft auf eine mit der Geschwindigkeit c bewegte Fläche ausübt, deren Arealgröße als

Einheit des Maaßes der Oberfläche angenommen wird, und deren Bewegung in einer Richtung geschieht, welche senkrecht auf der Fläche selbst steht.

§. 40.

Ist v die Geschwindigkeit womit sich die Fläche AB (fig. 1.) nach der Richtung CD fortbewegt, so wird die nach der Normale CE zerlegte Geschwindigkeit, da der Winkel ECD (§. 8.) gleich 90° — ψ gesetzt wurde, durch v sin ψ ausgedrückt, und da die Fläche = dS gesetzt wurde, so hat man den auf sie wirkenden Luftdruck

$$\Pi\, dS = p \,.\, e^{\frac{vv \sin \psi^2}{2k}} \,.\, dS.$$

Dieser Druck zerlegt sich in zwei andere

$$\Pi\, dS \,.\, \sin\psi, \qquad \Pi\, dS \,.\, \cos\psi,$$

von denen der erste nach der Richtung der Bewegung CD, der zweite nach der darauf senkrechten Richtung CF geht.

Setzt man statt Π seinen Werth, so erhält man statt des Totaldrucks, die beiden einzelnen

$$p \,.\, e^{\frac{vv \sin \psi^2}{2k}} \sin\psi \,.\, dS,$$

$$p \,.\, e^{\frac{vv \sin \psi^2}{2k}} \cos\psi\; dS.$$

Man sieht leicht ein, daß bei allen denjenigen Körpern, bei denen die Richtung der Bewegung des Körpers durch den Schwerpunkt geht, und diese Richtungslinie eine Axe des Körpers ist, gegen welche die Oberfläche desselben symmetrisch ist, der auf die Richtung der Bewegung senkrechte Druck sich gegenseitig aufheben muß.

Da nun die Kugeln, welche fast allein ein Gegenstand der practischen Anwendung sind, die angegebenen Bedingungen besitzen, so werden wir die Betrachtung dieser auf die Richtung der Bewegung senkrechten Kraft unterlassen, und uns allein auf den nach der Richtung der Bewegung zerlegten Druck beschränken.

§. 41.

Der Ausdruck

$$p \cdot e^{\frac{vv \sin\psi^2}{2k}} \cdot \sin\psi \cdot dS$$

gilt für den Widerstand der Luft gegen eine als Element einer Oberfläche zu betrachtende Ebene, deren Inhalt dS ist, und welche mit der Richtung der Bewegung einen Winkel ψ macht. Will man daher diesen Widerstand für eine ausgedehnte Oberfläche erhalten, so muß man das Integral dieser Differentialformel bis dahin nehmen, wo der Winkel ψ Null wird, weil auf die an dieser Stelle liegenden Elemente kein Druck mehr statt findet, indem ihre Ebene parallel mit der Richtung der Bewegung fortgeht.

Das auf diese Art gefundene Integral giebt dann den Widerstand auf die vordere Seite des Körpers, die durch ihre Bewegung die vor ihr befindliche Luft wirklich zusammenpreßt, und so ihre eigene Bewegung verzögert. Allein hiervon muß der Druck der auf die hintere Seite des Körpers hervorgebracht wird, wieder abgezogen werden.

Es dürfte nun wohl im Allgemeinen unmöglich seyn, die mannigfaltigen Bewegungen und Stöße der

Luft hinter dem Körper analytisch zu entwickeln, allein bei einiger Ueberlegung bemerkt man wohl, daß man nicht viel fehlen werde, wenn man im Mittel den Druck auf jedes Element der hintern Seite des Körpers gleich dem gewöhnlichen Druck der atmosphärischen Luft setzt, welches auch durch die Uebereinstimmung der aus dieser Hypothese abgeleiteten Resultate mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Bezeichnet man daher durch dS′ ein Element der hintern Fläche des bewegten Körpers, durch ψ' den Winkel den dasselbe mit der Richtung der Bewegung macht, so ist $p \sin\psi' . dS'$ der auf dies Element statt findende Druck, nach der Richtung der Bewegung zerlegt.

Integrirt man diesen Differentialausdruck für die hintere Fläche des Körpers bis an die Stelle, wo der Vorderdruck zu wirken anfängt, d. h. bis dahin, wo $\psi = 0$ ist, so erhält man den ganzen nach der Richtung der Bewegung auf den Hintertheil des Körpers wirkenden Druck.

Da dieser dazu dient die Bewegung wieder zu vermehren, so wird der Unterschied zwischen beiden Integralen den eigentlichen Widerstand der Luft ausdrükken; man hat daher

$$p \int e^{\frac{vv}{2k} \sin\psi^2} . \sin\psi . dS$$
$$- p \int \sin\psi' . dS'$$

für den wahren Ausdruck des Widerstandes der Luft.

§. 42.

Wir wollen, ehe wir die Anwendung der allgemeinen Formeln des vorigen Paragraphs für den Widerstand der Luft auf einige besondere Fälle vornehmen, die Größe k rücksichtlich ihres Zahlenwerthes bestimmen.

Der Druck der Luft wird bekanntlich durch das Barometer gemessen, indem das Gewicht der in demselben befindlichen Quecksilbersäule dem Druck der Luft das Gleichgewicht hält. Es sey die Länge dieser Säule $= h$, die Dichtigkeit des Quecksilbers $= \Delta$, der Fallraum eines durch die Schwere beschleunigten Körpers in der ersten Secunde $= \frac{1}{2} g$, so ist das Gewicht einer solchen Quecksilbersäule, die zur Basis die als Einheit angenommene Fläche hat $= gh\Delta$. Dieses Gewicht ist dem Druck p gleich; man hat daher

$$g\Delta h = k\rho.$$

Nun hat sich aus den Versuchen ergeben, daß bei einer Höhe des Barometers von 76 Centimeter und 0° der Temperatur der Luft, die Dichtigkeit des Quecksilbers 10506 Mal größer ist als die der Luft. Man hat daher

$$\frac{\Delta}{\rho} = 10506,$$

$$h = 0^{m}76,$$

$$g = 9^{m}8088,$$

aus welchen Zahlen sich

$$k = \frac{\Delta}{\rho} \cdot g \cdot h,$$

berechnen läßt, und man findet

$$\log \frac{\Delta}{\rho} = 4.0214374$$
$$\log g = 0.9916159$$
$$\log h = 9.8808136$$
$$\log k = 4.8938669$$
$$k = 78319 \text{ Meter.}$$

Hieraus folgt $\sqrt{2k} = 395^m,8$. Dies ist die Geschwindigkeit, womit eine so comprimirte Luft als die an der Oberfläche der Erde ist, in den leeren Raum ausfließt. Drückt man diese Geschwindigkeit in englischen Fußen aus, so erhält man eine runde Zahl. Man hat nämlich folgende Verhältnisse

1 Meter = 3,078444 pariser Fuß,

1 par. F. = 1,06575 engl. Fuß,

und hierdurch findet sich $\sqrt{2k} = 1298\frac{1}{2}$ engl. Fuß, wofür wir 1300 annehmen wollen.

§. 43.

Wir wollen jetzt den Widerstand der Luft auf einen Cylinder suchen, der sich in der Richtung seiner auf der kreisförmigen Basis desselben senkrecht stehenden Axe bewegt. Der Winkel ψ hat hier den constanten Werth von 90°, und bezeichnet man den Halbmesser des Kreises der Grundfläche durch r, so ist

$$\int dS = \pi rr.$$

Eben so ist auch $\psi' = 90°$, $\int dS' = \pi rr$, folglich aus §. 18. der Widerstand

$$= p\pi rr \left[e^{\frac{vv}{2k}} - 1\right].$$

Ist die Geschwindigkeit v so klein, daß die höhern Potenzen des Verhältnisses von $\frac{v}{1300}$ vernachlässigt werden können, so bleibt, da in diesem Fall

$$e^{\frac{vv}{2k}} = 1 + \frac{vv}{2k}$$

gesetzt werden kann, der Widerstand

$$= p \pi rr \cdot \frac{vv}{2k}.$$

Man setze statt p seinen Werth $k\rho$, und statt vv, 2gs, wo s die der Geschwindigkeit v zugehörige Fallhöhe bedeutet, so kommt der Widerstand

$$= g \rho \pi rr s.$$

Dieser Ausdruck giebt das Gewicht einer Luftsäule von der Höhe s, deren Basis der des Cylinders gleich ist; völlig wie es die Erfahrung gelehrt hat, sobald man, wie hier auch angenommen wurde, blos kleine Geschwindigkeiten zum Grunde legte.

§. 44.

Die so eben gefundene Formel für den Widerstand der Luft bei kleineren Geschwindigkeiten, findet auch in dem Falle noch statt, wenn der Körper sich in einem andern widerstehenden Mittel bewegt, dessen Elasticität über alle Grenzen groß, oder dessen Dichtigkeit bei gewöhnlicher Elasticität über alle Grenzen klein wäre, denn in einem so stark comprimirten widerstehenden Mittel, würde die Größe k einen so großen Werth erhalten, daß alle Geschwindigkeiten, die wir auf der

Erde hervorzubringen im Stande sind, gegen dieselbe verschwinden würden, und also die höhern Potenzen von $\frac{vv}{2k}$ von selbst wegfallen müssen.

§. 45.

Um den Widerstand der Luft gegen eine Kugel zu finden, denke man sich senkrecht auf die Richtung der Bewegung eine Ebene durch den Mittelpunkt gelegt, so scheidet der durch ihren Durchschnitt auf der Kugeloberfläche entstehende größte Kreis den vordern Theil der Kugel von ihrem hintern Theile, in dem Sinne, in welchem der Widerstand durch die Integration der Formel gefunden werden muß. Es stelle (fig. 3.) AB diesen größten Kreis vor, C sey der Mittelpunkt der Kugel und CP diejenige Linie, welche verlängert die Richtung der Bewegung angiebt. PQ sey ein durch P gelegter größter Kreis, so daß der Winkel APQ $= \varphi$ ist, und PQ′ sey dem erstern unendlich nahe; dann wird der Winkel QPQ′ durch $d\varphi$ ausgedrückt werden. Man ziehe nach einem beliebigen Punkte M des Kreises QP den Halbmesser CM, so macht dieser mit der Ebene des Kreises AB denselben Winkel, welchen das in M liegende Element der Kugeloberfläche mit der Richtung CP macht. Da wir diesen Winkel früher durch ψ bezeichnet haben, so ist

$$\text{Winkel } QCM = \psi.$$

Fällt man von M das Perpendikel ML auf die Linie CP, so ist

$$ML = r \cos \psi,$$

indem wir den Halbmesser der Kugel CM $= r$ setzen. Der unendlich kleine Bogen eines mit diesem Perpendikel ML beschriebenen Parallelkreises Mm wird

$$= r \cos\psi \,.\, d\varphi.$$

Läßt man den Winkel ψ um $d\psi$ wachsen, so daß der Halbmesser CM nach CM' kommt, und zieht durch den Punkt M' den unendlich kleinen Bogen M'm' eines Parallelkreises, so bildet sich auf der Oberfläche der Kugel eine vierseitige Figur MM'm'm, die man als das Element der Kugeloberfläche betrachten kann. Da ferner die Parallelkreise Mm, M'm', deren Pol in P liegt, einen aus diesem Pole gezogenen größten Kreis unter rechten Winkeln schneiden, so ist das Viereck MM'm'm als ein Rechteck anzusehen, dessen Inhalt ddS durch das Product seiner anliegenden Seiten ausgedrückt wird. Es ist aber

$$Mm = r \cos\psi \, d\varphi, \qquad MM' = r \, d\psi,$$

folglich, wenn man beide Größen mit einander multiplicirt: $ddS = rr \cos\psi \; d\psi \,.\, d\varphi.$

Da der Winkel φ in denjenigen Factoren von dS, die zur Berechnung des Widerstandes dienen, nicht vorkommt, so kann man diesen Ausdruck gleich einmal rücksichtlich der veränderlichen Größe φ integriren, und da der Winkel φ um die ganze Kugel herum ausgedehnt werden muß, so hat man das Integral von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\varphi$ zu nehmen, wo $\pi = 3{,}14159\ldots$ ist. Dann hat man

$$dS = 2\pi rr \cos\psi \,.\, d\psi.$$

Dieser Ausdruck ist nichts anders als die Oberfläche eines um die ganze Kugel herumgehenden, von zwei

unendlich nahe an einander liegenden, mit AB parallel laufenden Kreisen, eingeschlossenen Ringes.

Setzt man diesen Werth von dS in den Ausdruck des Widerstandes §. 18., so erhält man

$$2 p \pi rr \int e^{\frac{vv}{2k} \sin \psi^2} . \sin \psi \cos \psi \, d\psi$$
$$- 2 p \pi rr \int \sin \psi' \cos \psi' \, d\psi',$$

indem man in dem Ausdruck von dS' nur statt ψ, ψ' setzt. Diese beiden Integrale müssen jedesmal auf die halbe Kugeloberfläche ausgedehnt werden, und hierzu muß der Winkel ψ von 0 bis 90° wachsen, d. h. man nimmt die Integrale von $\psi = 0$ bis $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Dasselbe gilt auch von ψ'. Das letzte Integral läßt sich leicht finden, denn man hat

$$\sin \psi' . \cos \psi \, d\psi = \sin \psi' . d . \sin \psi'$$
$$= \tfrac{1}{2} d . \sin \psi'^2,$$

folglich

$$\int \sin \psi' . \cos \psi' \, d\psi' = \tfrac{1}{2} \sin \psi'^2 + C.$$

Für $\psi' = 0$ muß das Integral verschwinden, man hat daher, weil $\sin 0 = 0$, auch $C = 0$; für $\psi' = \frac{1}{2}\pi$ ist $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$, also wird das ganze Integral

$$\int \sin \psi' \cos \psi' \, d\psi' \begin{bmatrix} \psi' = 0 \\ \psi' = \frac{1}{2}\pi \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}.$$

Die in Klammern eingeschlossenen Werthe von ψ' geben nach der gewöhnlich angewandten Beziehungsart die Grenzen an, zwischen denen das Integral genommen werden muß.

Es bleibt also der Widerstand

$$= 2 \pi p rr \int e^{\frac{vv}{2k} \sin \psi^2} \sin \psi \cos \psi \, d\psi$$
$$- \pi p rr.$$

Um das erste Integral zu finden, setze man

$$\frac{vv}{2k} \sin \psi^2 = y,$$

so hat man durch Differentiation

$$\frac{vv}{k} \sin \psi \cos \psi \, d\psi = dy$$

$$\sin \psi \cos \psi \, d\psi = \frac{k\,dy}{vv}, \quad \text{folglich}$$

$$\int e^{\frac{vv}{2k} \sin \psi^2} . \sin \psi . \cos \psi \, d\psi$$

$$= \int e^y . \frac{kdy}{vv} = \frac{k}{vv} \int e^y \, dy.$$

Nun ist aber $e^y dy = d . e^y$, folglich

$$\int e^{\frac{vv}{2k} \sin \psi^2} = \frac{k}{vv} e^y + C.$$

Für $\psi = 0$ zeigt die Gleichung

$$\frac{vv}{2k} \sin \psi^2 = y,$$

daß auch $y = 0$ wird, und da für diesen Werth von ψ das Integral selbst verschwinden soll, so ist zur Bestimmung von C

$$0 = \frac{k}{vv} . e^0 + C;$$

dies giebt $C = -\frac{k}{vv}$, also

$$\int e^{\frac{vv}{2k} \sin \psi^2} = \frac{k}{vv} e^y - \frac{k}{vv}.$$

Für $\psi = \frac{1}{2}\pi$, wo das Integral seinen vollen Werth erhält, ist $y = \frac{vv}{2k}$; man hat daher

$$\int e^{\frac{vv}{2k}\sin\psi^2} \left[\begin{matrix}\psi = 0 \\ \psi = \frac{1}{2}\pi\end{matrix}\right] = \frac{k}{vv}\left(e^{\frac{vv}{2k}} - 1\right),$$

folglich den vollständigen Widerstand der Luft auf eine Kugel

$$= \pi\, p\, rr \left[e^{\frac{vv}{2k}} \cdot \frac{2k}{vv} - \frac{2k}{vv} - 1\right].$$

§. 46.

Entwickelt man den in Klammern stehenden Ausdruck in eine Reihe, und setzt der Kürze wegen

$$vv = 2kq,$$

so erhält man

$$\pi\, p\, rr \left[\tfrac{1}{2} q + \frac{q^2}{2 \cdot 3} + \frac{q^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{q^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdot\right].$$

So lange die Geschwindigkeit v so klein ist, daß man die höhern Potenzen von q vernachlässigen kann, wird der Widerstand

$$= \pi\, p\, rr \cdot \frac{q}{2}.$$

Für den Cylinder ergibt sich derselbe

$$= \pi\, p\, rr \cdot q,$$

folglich ist der Widerstand gegen eine Kugel, deren größter Kreis der Basis des Cylinders gleich ist, nur halb so groß als gegen den Cylinder, wenn beide Körper einerlei Geschwindigkeit haben, wie die Versuche auch gezeigt haben.

Will man das Verhältniß der Widerstände der Luft auf beide Körper für jede Geschwindigkeit haben, da das so eben angegebene nur für kleine Geschwindigkeiten

gilt, so muß man den Ausdruck des Widerstandes für den Cylinder ebenfalls in eine Reihe entwickeln. Er war $= \pi\, rr\, p\, (e^q - 1)$, oder

$$= \pi\, rr\, p \left(q + \frac{qq}{2} + \frac{q^3}{2.\,3} + \frac{q^4}{2.\,3.\,4} + \ldots\right).$$

Bezeichnet man den Widerstand auf die Kugel durch K, auf den Cylinder durch C, so hat man vermittelst dieser beiden Reihen

$$\frac{K}{C} = \tfrac{1}{2}\,.\, \frac{1 + \frac{q}{3} + \frac{qq}{3.\,4} + \frac{q^3}{3.\,4.\,5} + \ldots}{1 + \frac{q}{2} + \frac{qq}{2.\,3} + \frac{q^3}{2.\,3.\,4} + \ldots}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist immer kleiner als der Nenner, also ist auch das Verhältniß der Widerstände auf beide Körper, streng genommen, immer kleiner als ½.

§. 47.

Als Beispiel wollen wir den Widerstand der Luft auf eine 24 pfündige Kanonenkugel berechnen, die sich mit 2000 Fuß Geschwindigkeit bewegt. Nehmen wir den englischen Cubikfuß Eisen zu 7645 Unzen Avoir du poids Gewicht an, so enthält diese Kugel 86,8 Cubikzoll, und ihren Halbmesser findet man aus der Formel

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\,.\,86{,}8} = 2{,}747 \text{ engl. Zoll.}$$

Der Widerstand ist

$$= \pi\, rr\, p\, \frac{e^q - (q + 1)}{q},$$

wo p die Höhe einer Quecksilbersäule bedeutet, die dem Druck der Luft das Gleichgewicht hält, welche wir zu

30 engl. Zollen annehmen wollen, und $q = \left(\frac{v}{1300}\right)^2$ gesetzt wird. Bezeichnet man das Gewicht eines Cubikzolles Quecksilber durch w = 7,8703 Unzen, so hat man

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0.49715 \\ \log rr &= 0.87762 \\ \log p &= 1.47712 \\ \log w &= 0.89599 \\ \hline & 3.74788 = \log \pi\, rr\, p \,.\, w. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \log v &= 3.30103 \\ \log 1300 &= 3.11394 \\ \hline & 0.18709 \times 2 \\ \hline \log q &= 0.37418 \\ \log.\log e &= 9.63778 \\ \hline \log.\log e^q &= 0.01196 \\ \hline \log e^q &= 1.02793. \\ e^q &= 10{,}664 \\ q + 1 &= 3{,}367 \\ \hline & 7{,}297 = e^q - (q+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log e^q - (q+1) &= 0.86314 \\ \log q &= 0.37418 \\ \hline & 0.48896 \\ \log \pi\, p\, rr\, w &= 3.74788 \\ \hline & 4.23684. \end{aligned}$$

Hierzu gehört die Zahl 17252, und diese Anzahl Unzen giebt das Gewicht an, welches wegen dem Widerstande der Luft auf die Kugel drückt. Dividirt man durch 16, so kommt 1076 Pfund, also ist bei dieser

Geschwindigkeit der Widerstand mehr als 40 Mal größer als das Gewicht der Kugel.

Bei gleichen Geschwindigkeiten verhalten sich die Widerstände wie die Quadrate der Halbmesser, d. h. sind die Halbmesser zweier Kugeln r und r', die Widerstände W und W', so ist

$$W : W' = rr : r'r',$$

und wenn G und G' die Gewichte derselben bei gleicher Materie bedeuten, so hat man

$$G : G' = r^3 : r'^3,$$

also auch

$$\sqrt{W} : \sqrt{W'} = \sqrt[3]{G} : \sqrt[3]{G'},$$

oder

$$W : W' = \sqrt[3]{G^2} : \sqrt[3]{G'^2}.$$

Man würde also den Widerstand der Luft auf eine 48 pfündige Kanonenkugel finden, indem man obige 1076 Pfund mit $\sqrt[3]{4}$ multiplicirte.

So lange die Geschwindigkeiten klein sind, thut man besser, den Widerstand vermittelst einer Reihe zu berechnen, und dann ist:

$$Q = \tfrac{1}{2} q + \tfrac{1}{6} qq + \tfrac{1}{24} q^3 + \tfrac{1}{120} q^4 + \ldots$$

Ich bemerke noch, daß das Verhältniß $q : 2Q$ zugleich das Verhältniß des Widerstandes nach der älteren und nach dieser Theorie berechnet angiebt, nachdem man an der älteren die §. 30. erwähnte Verbesserung angebracht hat.

§. 48.

Was die Einwirkung des Widerstandes der Luft auf die Bewegung der Kugel betrifft, so werden wir

blos den einfachen Fall hier betrachten, wo die Kugel in gerader Linie fortgeht, also auf die Schwerkraft keine Rücksicht genommen wird, und dies giebt eine bedeutende Näherung zu dem Falle, wo die Kugel horizontal abgeschossen wird.

Setzt man hierbei

den zurückgelegten Weg $= x$,
die Zeit $= t$,
die Geschwindigkeit $= v$,
die Masse der Kugel $= m$,
die Kraft der Schwere $= g$,
der Widerstand der Luft $= R$,

so hat man den Grundsätzen der Mechanik zufolge die beiden Gleichungen

$$m \cdot d \cdot \frac{dx}{dt} = -g R\, dt$$

$$dx = v\, dt.$$

Die erste Gleichung giebt auch

$$\frac{mdv}{g} = -R\, dt.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit v und setzt statt vdt, dx, so kommt

$$\frac{m \cdot vdv}{g} = -R\, dx.$$

Wir haben in §. 46.

$$vv = 2kq$$

gesetzt, woraus man durch Differentiation

$$vdv = kdq$$

erhält, und dieser Werth in vorige Gleichung gesetzt, giebt

$$\frac{mk}{g}\, dq = - R\, ds.$$

Nun war aber

$$R = \pi\, rr\, p \,.\, \frac{e^q - (1 + q)}{q},$$

folglich

$$\frac{q dq}{e^q - (1 + q)} = - \frac{g \pi\, rr\, p}{mk}\, dx.$$

Differentiirt man den Ausdruck

$$1 - (1 + q)\, e^{-q},$$

so erhält man

$$+ e^{-q}\, dq - e^{-q}\, dq + q e^{-q}\, dq$$
$$= q \,.\, e^{-q}\, dq.$$

Multiplicirt man den in unserer Differentialformel vorkommenden Bruch

$$\frac{q\, dq}{e^q - (1 + q)}$$

im Zähler und Nenner durch e^{-q}, so kommt

$$\frac{e^{-q} \,.\, q\, dq}{1 - (1 + q)\, e^{-q}},$$

und diesen Ausdruck kann man dem so eben bewiesenen zufolge, auch so schreiben:

$$\frac{d \,.\, (1 - (1 + q)\, e^{-q}}{1 - (1 + q)\, e^{-q}},$$

folglich giebt die Differentialformel

$$\frac{d \,.\, (1 - (1 + q)\, e^{-q})}{1 - (1 + q)\, e^{-q}} = - \frac{g \pi\, rr\, p}{mk}\, dx.$$

Aus dieser findet sich durch Integration

$$\log(1-(1+q)\,e^{-q}) = \text{Const.} - \frac{g\,\pi\,rr\,p}{mk}\,x,$$

wo der Logarithme ein natürlicher ist.

Um die Constante zu bestimmen, muß man für einen bestimmten Punkt der Bahn, die Geschwindigkeit kennen. Dieser Punkt habe die Entfernung x' vom Anfange, und der daselbst statt findenden bekannten Geschwindigkeit v', entspreche der Werth von $q = q'$, so hat man zur Bestimmung der Constante, die Gleichung

$$\log(1-(1+q')\,e^{-q'}) = \text{Const.} - \frac{g\,\pi\,rr\,p}{mk}\,x'.$$

Zieht man die erste Gleichung von dieser ab, so bleibt

$$\log\left[\frac{1-(1+q')\,e^{-q'}}{1-(1+q)\,e^{-q}}\right] = \frac{g\,\pi\,rr\,p}{mk}\,(x-x'),$$

welche Gleichung die Relation zwischen der Geschwindigkeit und dem zurückgelegten Wege angiebt.

§. 49.

Wir führten früher die Bezeichnung ein

$$Q = \frac{e^q - (1+q)}{q},$$

und hierdurch wird

$$1-(1+q)\,e^{-q} = \frac{Q\,q}{e^q},$$

und wenn man den Werth von Q, der dem Werthe $q = q'$ entspricht, durch Q' bezeichnet, so hat man ebenfalls

$$1 - (1 + q)\, e^{-q'} = \frac{Q'q'}{e^{q'}},$$

folglich

$$\frac{g\pi rrp}{mk}(x - x') = \log Q' - \log Q'$$
$$+ \log q' - \log q + q - q'$$

Will man sich bei der numerischen Berechnung dieser Formel, der gewöhnlichen briggsschen oder Tafellogarithmen bedienen, so muß man diejenigen Glieder, welche nicht logarithmisch sind, durch den Modulus der briggsschen Logarithmen = 0,4342944 multipliciren.

Nach der ältern Theorie würde

$$R = \pi rrp \,.\, \frac{q}{2}$$

seyn, also, wenn man diesen Werth in die Gleichung des vorigen Paragraphs

$$\frac{mk}{g}dq = - R\,dx$$

setzt, so kommt

$$\frac{dq}{q} = - \frac{g\pi rrp}{2mk}dx,$$

und wenn man integrirt, und die Constante wie vorher bestimmt,

$$\log q' - \log q = \frac{g\pi rrp}{2mk}(x - x').$$

§. 50.

Hutton fand bei seinen Versuchen über die Geschwindigkeiten der Kugeln vermittelst des ballistischen Pendels, daß eine eiserne Kugel von 0,98 engl. Zoll

im Halbmesser, bei einer Ladung von 1 Pfund Pulver, nachdem sie sich 30 Fuß von der Mündung der Kanone entfernt hatte, eine Geschwindigkeit von 2088 Fuß besaß, und in einer Entfernung von 360 Fuß von der Mündung der Kanone, hatte dieselbe auf 1582 Fuß abgenommen.

Will man nach voriger Theorie die Berechnung des zurückgelegten Weges aus den beiden beobachteten Geschwindigkeiten anstellen, so hat man im vorliegenden Falle folgende numerische Werthe der in der Formel vorkommenden Buchstaben.

$$\begin{aligned} v' &= 2088 \text{ Fuß} \\ v &= 1582 \text{ —} \\ q' &= 2{,}579730 \\ q &= 1{,}480902 \\ \log \text{hyp. } Q' &= 1.315519 \\ \text{—} \quad Q &= 0.257591 \\ \text{—} \quad q' &= 0.947683 \\ \text{—} \quad q &= 0.392648. \end{aligned}$$

Man hat also der Formel

$$\frac{g \pi rr p}{mk}(x - x') = \log Q' - \log Q + \log q' - \log q + q - q'$$

zufolge

$$\begin{aligned} \log Q' &= 1.315519 \\ \log Q &= \underline{0.257591} \\ & 1.057928 \\ \log q' &= \underline{0.947683} \\ & 2.005611 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} & 2.005611 \\ \log q = & \underline{0.392648} \\ & 1.612963 \\ q = & \underline{1.480902} \\ & 3.093865 \\ q' = & \underline{2.579730} \\ & 0.514135. \end{array}$$

Wir haben jetzt noch die Formel $\frac{g \pi rr p}{mk}$ zu berechnen. Bezeichnet man die Dichtigkeit des Quecksilbers durch δ, während die des Eisens der Einheit gleich gesetzt wird, so kann man die Formel auch so schreiben:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{g}{k} \cdot \frac{p}{r} \cdot \delta,$$

indem man bemerkt, daß die Masse der eisernen Kugel $= \frac{4}{3} \pi r^3$ wird. Man hat hierbei

$$\begin{array}{rl} p = & 30 \text{ engl. Zoll} \\ r = & 0{,}98 \text{ — —} \\ \delta = & 1{,}73359 \\ \frac{k}{g} = & 26161{,}5 \text{ engl. Fuß.} \end{array}$$

Man erhält den Logarithmen dieses Factors

$= 7.1822398 - 10.$

Zieht man diesen von dem Logarithmen der vorhin gefundenen Zahl 0,514135 ab, so bleibt

$$\log(x - x') = 2.5288379$$
$$x - x' = 337{,}9 \text{ Fuß.}$$

Die Beobachtung giebt 330 Fuß, und diese Uebereinstimmung ist größer, als man sie wohl erwarten konnte.

Hätte man diese Entfernung nach der ältern Theorie berechnet, so würde man 729,6 Fuß, also mehr als doppelt so viel, gefunden haben.

§. 51.

Die umgekehrte Aufgabe, aus dem zurückgelegten Wege die Geschwindigkeit zu finden, die entweder zu Anfang oder zu Ende desselben statt findet, wenn eine von beiden als gegeben angesehen wird, läßt sich blos durch Versuche finden, da die Gleichung zwischen q und x transcendent ist. Nur in dem Falle, daß der zurückgelegte Weg sehr klein ist, kann man dieselbe direct finden. Bezeichnet man nämlich den Factor

$\frac{g \pi rr p}{mk}$ durch μ, so ist

$$\log \frac{1 - (1 + q') e^{-q'}}{1 - (1 + q) e^{-q}} = \mu (x - x').$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man

$$\frac{1 - (1 + q') e^{-q'}}{1 - (1 + q) e^{-q}} = e^{\mu (x - x')},$$

und da $\mu (x - x')$ eine kleine Zahl seyn wird, so kann man ohne merklichen Fehler

$$e^{\mu (x - x')} = 1 + \mu (x - x')$$

setzen. Soll ferner q' die von der gesuchten Geschwindigkeit abhängige Größe seyn, so daß q' als unbekannt angesehn wird, so setze man

$$q' = q + h.$$

Dann ergiebt sich vermittelst des taylorschen Lehrsatzes, wenn man diejenigen Potenzen von h vernachlässigt, die die erste übersteigen

$$1 - (1 + q') e^{-q'} = 1 - (1 + q) e^{-q} + q e^{-q} h,$$

also auch

$$\frac{1 - (1 + q') e^{-q'}}{1 - (1 + q) e^{-q}} = 1 + \frac{q e^{-q}}{1 - (1 + q) e^{-q}} h.$$

Multiplicirt man den Bruch, in welchen h multiplicirt ist, im Zähler und Nenner durch e^q, so kommt dieser Ausdruck

$$= 1 + \frac{q}{e^q - (1 + q)} h.$$

Allein der Factor von h ist nichts anders als das Reciproke von Q, folglich ist er auch

$$= 1 + \frac{h}{Q}.$$

Man hat daher

$$1 + \frac{h}{Q} = 1 + \mu (x - x'),$$

folglich

$$h = Q \mu (x - x').$$

Man sieht leicht, daß diese Formel sich auf die Annahme zurückführen läßt, der Widerstand sey auf dem kleinen Wege $x - x'$ constant gewesen, und habe denjenigen Werth gehabt, welcher der Geschwindigkeit, von der q abhängt, entspricht. Hat man daher h aus dieser Formel gefunden, so berechne man Q noch einmal, indem man statt der Größe q, die Größe $q + \frac{1}{2} h$ nimmt, und diese neue Näherung wird h so genau ge-

ben, als es überhaupt bei dieser Art von Rechnungen, wo es auf einige Fuß nicht ankommt, nöthig ist.

Wollte man z. B. aus der Geschwindigkeit von 2088 Fuß in der Entfernung von 30 Fuß von der Mündung, die Geschwindigkeit haben, mit welcher die Kugel aus der Mündung hervorgeht, so hat man, da $x - x' = 30$

$$\log(x - x') = 1.47712$$
$$\log \mu = 7.18224$$
$$\log Q = 0.57132$$
$$\log h = 9.23068$$
$$h = 0.17009.$$

Berechnet man den Werth von Q noch einmal, indem man statt q, $q + \frac{1}{2} h$ setzt, so kommt $\log Q = 0.60385$, $\log h = 9.26321$, $h = 0.18332$. Nun war allgemein §. 46.

$$vv = 2kq,$$

also, wenn man auf beiden Seiten die Wurzel auszieht und statt $\sqrt{2k}$, 1300 Fuß setzt

$$v = 1300 \cdot \sqrt{q}.$$

Der Werth von q war $= 2{,}57973$, und hierzu h addirt, giebt den der Anfangsgeschwindigkeit entsprechenden Werth von $q = 2{,}76305$, und hierdurch wird die Anfangsgeschwindigkeit $v = 2161$ Fuß. Ohne die zweite Correction würde man 2156 Fuß gefunden haben.

§. 52.

Die Relationen zwischen der verflossenen Zeit und der Geschwindigkeit, oder dem zurückgelegten Wege

lassen sich nicht durch geschlossene Formeln darstellen. Nimmt man die Formel des §. 48,

$$\frac{m\,dv}{g} = -\,R\,dt,$$

und setzt statt dv, seinen aus der Gleichung

$$v = 1300 \,.\, \sqrt{q}.$$

abgeleiteten Werth

$$dv = 1300 \,.\, \frac{dq}{2\sqrt{q}},$$

so erhält man

$$1300 \,.\, \frac{m}{g} \,.\, \frac{dq}{2\sqrt{q}} = -\,R\,dt.$$

Nun war aber

$$R = \pi\,rr\,p \,.\, \frac{e^q - (q+1)}{q},$$

also auch

$$2 \,.\, dt\,\frac{g\,\pi\,rr\,p}{m \,.\, 1360} = -\,\frac{dq\,\sqrt{q}}{e^q - (q+1)}.$$

Bemerkt man, daß $1300^2 = 2k$, und

$$\frac{g\,\pi\,rr\,p}{mk} = \mu$$

gesetzt worden ist, so hat man auch die Gleichung

$$1300\,\mu \,.\, dt = -\,\frac{dq\,\sqrt{q}}{e^q - (q+1)}.$$

Entwickelt man den Nenner des Bruchs in eine nach Potenzen von q fortlaufende Reihe, so erhält man

$$e^q - (q+1) =$$
$$\tfrac{1}{2}qq + \tfrac{1}{6}q^3 + \tfrac{1}{24}q^4 + \tfrac{1}{120}q^5 + \ldots$$

Dieser Reihe gebe man die Form

$$\frac{\frac{1}{3}qq}{1 + \alpha q + \beta q^2 + \gamma q^3 + \ldots},$$

wo α, β, γ unbestimmte Coefficienten sind. Man erhält nach der gewöhnlichen Methode zur Bestimmung dieser Coefficienten, da das Product der beiden Reihen

$$1 + \frac{q}{3} + \frac{q^2}{3.4} + \frac{q^3}{3.4.5} + \ldots$$

$$1 + \alpha q + \beta q^2 + \gamma q^3 + \ldots$$

der Einheit gleich seyn muß, folgende Gleichungen

$$\alpha + \frac{1}{3} = 0,$$

$$\beta + \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{3.4} = 0,$$

$$\gamma + \frac{\beta}{3} + \frac{\alpha}{3.4} + \frac{1}{3.4.5} = 0$$

u. s. w.

wo das Gesetz der gegenseitigen Beziehung dieser Coefficienten einleuchtend ist. Man findet aus denselben

$$\alpha = -\frac{1}{3},$$

$$\beta = +\frac{1}{36},$$

$$\gamma = +\frac{1}{540},$$

$$\delta = -\frac{1}{6480},$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{27216},$$

$$\zeta = -\frac{1}{4082400}, \text{ u. s. w.}$$

Man hat dann folgenden Ausdruck für dt:

$$1300\,\mu\,dt = -2\,dq \left\{ \begin{array}{l} q^{-3/2} - \frac{1}{3} q^{-1/2} + \frac{1}{36} q^{1/2} \\ + \frac{1}{540} q^{3/2} - \frac{1}{6480} q^{5/2} \\ - \frac{1}{27216} q^{7/2} - \ldots \end{array} \right\},$$

also, wenn man integrirt

$$1300\,\mu t = \text{Const.} + \frac{1}{\sqrt{q}} \left\{ \begin{array}{l} 4 + \frac{4}{3} q - \frac{1}{27} q^2 \\ - \frac{1}{675} q^3 + \frac{1}{11340} q^4 \\ + \frac{1}{61236} q^5 + \ldots \end{array} \right\}.$$

Um die Constante zu bestimmen, sey für $t = 0$ der Werth von $q = q'$, so findet man

$$\text{Const.} = -\frac{1}{\sqrt{q'}} \left\{ \begin{array}{l} 4 + \frac{4}{3} q' - \frac{1}{27} q'^2 \\ - \frac{1}{675} q'^3 + \frac{1}{11340} q'^4 \\ + \frac{1}{61236} q'^5 \end{array} \right\}.$$

Wendet man diese Formeln auf das schon früher gebrauchte Beispiel an, wo

$$q' = 2{,}57973, \quad q = 1{,}48090,$$

so erhält man Const. = − 4,4652, und den Werth der andern Reihe, die zu der Constante hinzugefügt wird = 4,8392. Da nun

$$1300\,\mu = 1{,}978,$$

so erhält man

$$1{,}978\,t = 0{,}374,$$

also t = 0″189, welche Zeit die Kugel gebraucht, um die 330 Fuß zu durchlaufen. Die mittlere Geschwindigkeit wird also

$$= \frac{330}{0,189} = 1746 \text{ Fuß}$$

betragen.